POLITECHNIKA WARSZAWSKA
WYDZIAŁ ELEKTRONIKI I TECHNIK INFORMACYJNYCH

Systemy wspomagania decyzji i projektowanie

Notatki do wykładu - wersja wstępna

Janusz Granat

Spis treści

Rozdział 1

Wprowadzenie do komputerowych systemów wspomagania decyzji

1.1. Systemy wspomagania decyzji a współczesne systemy informacyjne

Systemy informacyjne:

- Bazy danych
- Systemy zarządzania MIS (Management Information Systems)
- Systemy Informowania Kierownictwa EIS (Executive Information Systems)
- Systemy wspomagania decyzji DSS (Decision Support Systems)

1.2. Definicja systemu wspomagania decyzji (SWD)

Istnieją różne definicje systemu wspomagania decyzji, od bardzo ogólnej typu: "system wspomagania decyzji jest systemem, który pomaga człowiekowi w podjęciu lepszej decyzji", do bardziej precyzyjnych (np. Andriole, 1989). Precyzyjna definicja może prowadzić do zawężenia możliwości systemu, wobec tego pojęcie to jest zazwyczaj charakteryzowane przez wyszczególnienie własności, które system powinien posiadać (np. Sprague, 1983; Lewandowski i Wierzbicki, 1989). Poniżej zostanie przedstawiona jedna z możliwych klasyfikacji systemów wspomagania decyzji, która pozwoli na umiejscowienie rozpatrywanych w rozprawie systemów w szerokiej gamie istniejących systemów wspomagania decyzji.

Systemy posiadają różne cechy w zależności od tego, czy wspomagane są decyzje:

- strategiczne;
  (są to decyzje o długim horyzoncie czasowym, np. określenie kierunków

działalności przedsiębiorstwa, analiza inwestycji, określenie kierunku badań naukowych)

- taktyczne;
  (decyzje średnioterminowe, o zasięgu nie dłuższym niż 12 miesięcy, stanowią pomost między decyzjami strategicznymi a operacyjnymi poprzez transformacje decyzji ogólnych w bardziej szczegółowe wytyczne dla działań operacyjnych)

- operacyjne;
  (dotyczą codziennych szczegółowych decyzji związanych z bieżącym funkcjonowaniem systemu)

Ponadto decyzja może dotyczyć problemów:

- dobrze zdefiniowanych (well-structured)
  (dla którego można zidentyfikować strukturę i wszystkie parametry)

- posiadających część dobrze zdefiniowaną, ale również parametry, których nie można określić (semistructured)

- o trudnej do określenia strukturze i parametrach (unstructured)

Podziału można również dokonać ze względu na liczbę użytkowników i ich wzajemną kooperację:

- systemy z przeznaczeniem dla jednego użytkownika (osoby podejmującej decyzję, analityka systemowego, eksperta itd.) lub grupy o wspólnych celach

- systemy wspomagania decyzji grupowych, gdy w podjęciu decyzji bierze udział grupa o różnych celach, ale podejmowana jest jedna wspólna decyzja.

- systemy wspomagania sytuacji growych kooperatywnych i niekooperatywnych

Ze względu na model sytuacji decyzyjnej możemy wyróżnić następujące grupy systemów wspomagania decyzji:

- systemy, w których sytuacje decyzyjną opisuje się za pomocą modeli analitycznych; te systemy mogę być dalej dzielone ze względu na typ modelu matematycznego (modele statyczne liniowe i nieliniowe, dynamiczne, stochastyczne itd.)

- systemy, w których sytuacje decyzyjną opisuje się za pomocą modeli logicznych;

- systemy zintegrowane, które zawierają elementy wcześniej wymienionych systemów jak również proste narzędzia jak arkusze kalkulacyjne, bazy danych itd;

Ponieważ założeniem współczesnych systemów jest wspomaganie użytkownika w podejmowaniu decyzji, a nie jego zastępowanie, istotnym czynnikiem podziału jest sposób interakcji z użytkownikiem. Czynnik ten często decyduje o wykorzystaniu systemu w praktyce.

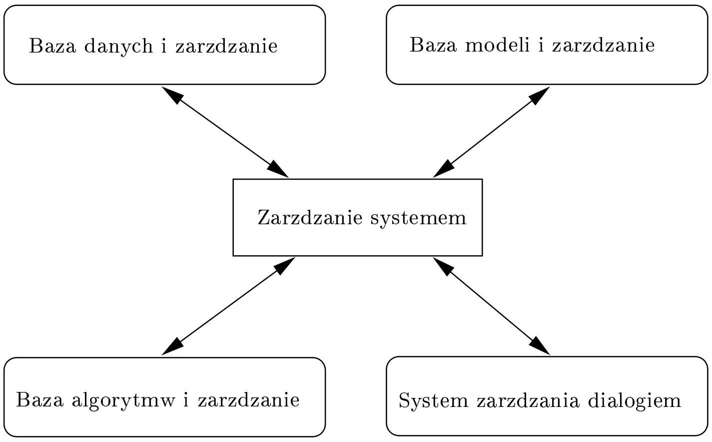
Pojawiła się również tendencja do budowy systemów specjalizowanych, które służą do rozwiązywania konkretnych problemów decyzyjnych wraz ze specjalizowanym interfejsem z użytkownikiem.

System wspomagania decyzji jest rozumiany w następujący sposób:

System wspomagania decyzji jest to system komputerowy, który wspomaga użytkownika w racjonalnej organizacji i kierowaniu procesem decyzyjnym oraz zawiera reprezentację wiedzy o sytuacji decyzyjnej w postaci modelu analitycznego (model może mieć również postać logiczną, ale w niniejszej rozprawie tego typu modele nie będą rozpatrywane), odpowiednie algorytmy umożliwiające korzystanie tych modeli, oraz dodatkowe moduły, jak bazę danych, interfejs z użytkownikiem itp.

Użytkownik jest to jednolita nazwa dla wszystkich użytkowników systemu wspomagania decyzji, a więc decydenta, analityka systemowego, eksperta, grupy o wspólnych celach.

1.3. Struktura systemu wspomagania decyzji



W ogólnej strukturze systemu wspomagania decyzji możemy wyróżnić pięć podstawowych elementów składowych (Minch i Burns, 1983; Ariav i Ginzberg, 1985; Makowski, 1991):

- **Moduł bazy danych i zestawu funkcji do zarządzania tą bazą.** Dane, które są dostępne dla użytkownika systemu wspomagania decyzji, można podzielić na dwie grupy. *Dane pierwotne*, które dotyczą modelu rzeczowego analizowanego problemu decyzyjnego i zostały dostarczone do systemu z zewnątrz, oraz *dane wygenerowane przez system* (w przypadku metod interaktywnych zawierają one również dane dostarczane przez użytkownika w trakcie procesu interakcji). W celu ułatwienia dostępu do danych zarówno przez użytkownika jak i inne moduły powinno się korzystać z istniejących systemów baz danych (np. DBASE, INFORMIX, ORACLE) lub przynajmniej system powinien posiadać - jako jedną z opcji - możliwość generacji plików w formatach standardowych. Ponadto w module tym powinny się znaleźć funkcje dostępu do rozproszonych lub zewnętrznych baz danych. Przykład wykorzystania baz danych do generowania zadań liniowych wielkiej skali można znaleźć w pracy Whitaker i Brown (1991).

- **Moduł bazy modeli i zestawu funkcji do tworzenia modeli.** W trakcie procesu modelowania powstają różne wersje modeli. Wynika to ze wzbogacania wiedzy o modelowanym procesie, czego efektem są nowe wersje modelu, czy warianty modeli o różnych wartościach parametrów. Niezbędne jest więc dostarczanie narzędzi do budowy, sprawdzania poprawności oraz zapisywania modeli. Poważnym problemem w przypadku modeli nieliniowych jest brak standardów dla zbiorów definiujących model (dla modeli liniowych za takim standardem jest MPS). Należy zatem dążyć do definicji standardu zapisu modeli nieliniowych, co ułatwi przenaszalność modeli między różnymi systemami. Jedną z możliwości jest wykorzystanie języka, który jest rozszerzeniem MPS. Tego typu idea jest wykorzystana w formacie zapisu modelu SIF w systemie LANCELOT (Conn, Gould i Toint, 1992). Z kolei w systemie DIDASN++ wykorzystano zapis MDF, który umożliwia definiowania znaczących części liniowych modelu nieliniowego w standardzie MPS. Rozwinęły się również bardziej zaawansowane języki i środowiska modelowania jak GAMS, AIMMS, AMPL. Jednakże środowiska te jest trudno integrować z systemami specyficznymi dla określonych zastosowań. Pojawia się konieczność prowadzenia dalszych badań w zakresie opracowania metod zapisu i korzystania z modeli. Coraz większym zainteresowaniem cieszy się metodologia modelowania strukturalnego (Geoffrion, 1987). Wprawdzie wymaga ona dalszego rozwoju, ale wprowadza kilka istotnych elementów do zagadnień budowy modeli:

  – dostarcza język modelowania, który ma dobrą specyfikację semantyczną, co ułatwia wyszukiwanie błędów w tworzonym modelu;
  – pozwala na uniezależnienie reprezentacji modelu i wykorzystywanych danych;
  – pozwala w jednolity sposób reprezentować różne typy modeli, co ułatwia łączenie modeli różnych typów w modelowaniu zjawisk złożonych;
  – język modelowania jest zgodny z metodologią obiektową co ułatwia wprowadzeniu hierarchii w strukturze modelu oraz jego zrozumienie.

  Modelowanie strukturalne pozwala na budowę bazy modeli zbliżoną do bazy danych, z możliwością rozróżnienia modelu i operacji jakie będzie można na tym modelu wykonać.

- **Moduł algorytmów i funkcje selekcji algorytmów.** W systemie wspomagania decyzji wykorzystującym modele analityczne można wyróżnić moduł, w którym zawarte będą algorytmy, które korzystają z modelu, czy baz danych, ale które nie są związane bezpośrednio z zarządzaniem bazy modeli, czy bazy danych. Przykładowo, w tego typu module mogą się znaleźć procedury optymalizacji.

- **Moduł zarządzania dialogiem z użytkownikiem.** W systemie, który wspomaga działalność decyzyjną człowieka moduł interakcji z użytkownikiem powinien być zaprojektowany ze szczególną uwagą. Zadaniem tego modułu jest prezentacja informacji dla użytkownika i translacja poleceń z języka użytkownika na język systemu. Interakcja może się odbywać w trybie tekstowym lub graficznym, w zależności od rozwiązywanego problemu.

- **Moduł zarządzania systemem.** Zadaniem tego systemu jest koordynacja pracy całego systemu, zapewnienie komunikacji między modułami, dostarczenie informacji o zadaniach wykonywanych w systemie itp.

Oprócz wymienionych modułów w specyficznych zastosowaniach należy dostarczyć elementy systemu, których nie można zaliczyć do żadnej z powyższych klas. Przykładem są moduły typu GIS (Geographical Information Systems).

Rozwój inżynierii oprogramowania, nowych środowisk do pisania i uruchamiania programów, a zwłaszcza metodologii programowania obiektowego ułatwia znacznie tworzenie systemów modułowych. Moduły powinny być pisane tak, aby była możliwość wykorzystania ich w różnych aplikacjach. Można również tworzyć narzędzia, nazywane generatorami systemów wspomagania decyzji, służące do łączenia tych modułów w jedną całość. Tego typu podejście pozwala na wielokrotne wykorzystanie już napisanych modeli oraz skraca znacznie proces budowy aplikacji specyficznej dla danego zastosowania.

Rozdział 2

Modelowanie sytuacji decyzyjnej

2.1. Sytuacja decyzyjna a model

- Analiza dyskretnych alternatyw (tablice i drzewa decyzyjne)
- Modele statyczne
  - ciągłe (liniowe, nieliniowe)
  - dyskretne (liniowe, nieliniowe)
- Modele dynamiczne

Inne podejscia:

- Diagramy
- Heurystyki
- Modele finansowe

2.2. Modelowanie analityczne sytuacji decyzyjnej

2.2.1. Elementy składowe modelu sytuacji decyzyjnej

2.2.2. Model rzeczowy sytuacji decyzyjnej

Modelując sytuację decyzyjną wyróżniamy model rzeczowy sytuacji decyzyjnej zawierający wiedzę o świecie zewnętrznym (a nie o preferencjach użytkownika), która może być wykorzystana w trakcie procesu podejmowania decyzji. Wiedza ta może być wyrażona w postaci modelu matematycznego, danych, hipotez itp. W rozdziale tym ograniczymy się do modeli w formie analitycznej, podkreślając, że jest to jedynie część wiedzy dostępnej w systemie wspomagania decyzji.

W analitycznym modelu rzeczowym sytuacji decyzyjnej wyróżnia się:

- *zmienne decyzyjne;*
- *parametry modelu (w tym także zmienne zakłócające w modelach z jawnymi elementami niepewności probabilistycznej);*
- *zmienne pośrednie;*
- *zmienne wyjściowe (część z tych zmiennych może zostać wybrana jako kryteria w sformułowaniu zadania optymalizacji wielokryterialnej),*

oraz

- *równania wyjść, w których wyróżniamy te, które określają jak zmienne wyjściowe zależą od zmiennych decyzyjnych*
- *równania ograniczeń, które określają zbiór decyzji dopuszczalnych*

Sformułowanie modelu.
Oznaczmy przez:

E_x - przestrzeń zmiennych decyzyjnych,
E_y - przestrzeń wyjść modelu,
X - zbiór decyzji dopuszczalnych.

Odwzorowanie przestrzeni decyzji w przestrzeń wyjść:

$$f : E_x \mapsto E_y$$

Zbiór dopuszczalnych wartości wyjść

$$Y = f(X) \subset E_y$$

W rozważaniach teoretycznych zakładamy, że $E_x = \mathbb{R}^n$, $E_y = \mathbb{R}^m$, zbiór decyzji dopuszczalnych $X \subset E_x$ jest zwarty, odwzorowanie f jest ciągłe.

Powyższy zapis jest wygodny przy rozważaniu aspektów teoretycznych modelu, natomiast przy budowie modelu komputerowego należy uwzględnić też bezpośrednio inne zależności, jak zależności od parametrów, czy zależności od innych wyjść modelu. Ułatwia to użytkownikowi definiowanie modelu i prowadzenie różnych eksperymentów z modelem. Wprowadźmy zatem jeszcze przestrzeń parametrów E_z i załóżmy, że $E_z = \mathbb{R}^l$. Poniżej przytaczamy definicje ogólne modelu, która zostały przyjęte w systemie IAC-DIDAS-N (Krglewski, Granat i Wierzbicki, 1991):

$$\begin{gathered}
\mathbf{y} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{z}, \mathbf{y}) \qquad (2.2.1)\\
\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^m\\
\mathbf{x}_d(\mathbf{z}) \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{x}_g(\mathbf{z})\\
\mathbf{y}_d(\mathbf{z}) \leq \mathbf{y} \leq \mathbf{y}_g(\mathbf{z})\\
\mathbf{z}_d \leq \mathbf{z} \leq \mathbf{z}_g
\end{gathered}$$

gdzie

$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$	- wektor zmiennych decyzyjnych
$\mathbf{z} \in \mathbb{R}^l$	- wektor parametrów
$\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$	- wektor wyjść
$\mathbf{x}_d, \mathbf{y}_d, \mathbf{z}_d$	- wektory ograniczeń dolnych odpowiednio dla zmiennych decyzyjnych, wyjść i parametrów
$\mathbf{x}_g, \mathbf{y}_g, \mathbf{z}_g$	- wektory ograniczeń górnych odpowiednio dla zmiennych decyzyjnych, wyjść i parametrów

W wielu przypadkach:

- modele nieliniowe mają znaczącą część liniową
- modele nieliniowe są tworzone na bazie istniejących modeli liniowych

Z tego powodu konieczne się staje dalsze rozszerzenie zapisu modelu, który bezpośrednio uwzględnia część liniową.

Model nieliniowy ze znaczącą częścią liniową

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{y}_1 & = & \mathbf{N}(\mathbf{x}_1, \mathbf{z}, \mathbf{y}_1) + \quad \mathbf{A}_{11}\mathbf{x}_1 + \mathbf{A}_{12}\mathbf{x}_2 + \mathbf{B}_1\mathbf{z} \\ \mathbf{y}_2 & = & \qquad\qquad\qquad \mathbf{A}_{21}\mathbf{x}_1 + \mathbf{A}_{22}\mathbf{x}_2 + \mathbf{B}_2\mathbf{z} \\ & & \mathbf{x}_d(\mathbf{z}) \le \mathbf{x} \le \mathbf{x}_g(\mathbf{z}) \\ & & \mathbf{y}_d(\mathbf{z}) \le \mathbf{y} \le \mathbf{y}_g(\mathbf{z}) \\ & & \mathbf{z}_d \le \mathbf{z} \le \mathbf{z}_g \end{array} \tag{2.2.2}$$

gdzie

$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$	- zmienne decyzyjne
$\mathbf{z} \in \mathbb{R}^l$	- parametry
$\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$	- wyjścia, $\mathbf{y} = (\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2)$
$\mathbf{x}_d, \mathbf{y}_d, \mathbf{z}_d$	- wektory ograniczeń dolnych odpowiednio dla zmiennych decyzyjnych, wyjść i parametrów
$\mathbf{x}_g, \mathbf{y}_g, \mathbf{z}_g$	- wektory ograniczeń górnych odpowiednio dla zmiennych decyzyjnych, wyjść i parametrów

Poprawność modelu matematycznego jest podstawowym elementem, który decyduje o wykorzystaniu wiedzy o sytuacji decyzyjnej w formie analitycznej. Należy zapewnić zatem odpowiednie narzędzia, które wspomagają budowę modelu, ułatwiają sprawdzenie jego wiarygodności i analizę modelu. Istnieje obszerna literatura poświęcona zagadnieniom teoretycznym związanym z budową modelu np. Wierzbicki (1977), Lawandowski (1982). Wybrane aspekty związane z implementacją narzędzi do analizy modeli liniowych zostały zawarte w pracy (Zakrzewski, 1989), która dotyczy systemu MENTAT-L. Elementy analizy modeli nieliniowych zostały również wprowadzone w systemie IAC-DIDAS-N (Krglewski i in., 1991).

Budowa modelu jest również ściśle związana z eksperymentami jakie można przeprowadzić na modelu. Eksperymenty te zwiększają możliwości oceny wiarygodności modelu.

Można wyróżnić następujące eksperymenty, które są użyteczne w trakcie budowy i analizy modelu:

- *Symulacja prosta.*
  W przypadku budowy modeli nieliniowych, oprócz podstawowej funkcji symulacji polegającej na obliczaniu wyjść modelu przy danych zmiennych decyzyjnych, powinna być też zapewniona możliwość symbolicznego obliczania i wyświetlania formuł na pochodne, jak również możliwość obliczeń krokowych, co ułatwia wyszukiwanie błędów.

- *Uogólniona inwersja modelu.*
  Inwersja taka jest wykorzystywana najczęściej do określenia takich wartości zmiennych decyzyjnych, dla których wyjścia modelu będą bliskie zadanym przez użytkownika wartościom odniesienia. Zadanie to jest nazywane również zadaniem syntezy.

  W pierwszym kroku użytkownik określa wartości odniesienia dla wybranych zmiennych wyjściowych.

  $$y_{i,ref} : i \in I_{y,ref} \subset \{1, \ldots, m\}$$

  $I_{y,ref}$ - oznacza zbiór indeksów wyjść, dla których określono wartości odniesienia.
  Jest to równoważne zdefiniowaniu wektora poziomów odniesienia dla zmiennych wyjściowych: $\tilde{\mathbf{y}}_{ref} \in \mathbb{R}^{\tilde{m}},\ 0 \leq \tilde{m} \leq m$ oraz wektora tych zmiennych wyjściowych, dla których zdefiniowano poziomy odniesienia: $\tilde{\mathbf{y}} \in \mathbb{R}^{\tilde{m}},\ 0 \leq \tilde{m} \leq m$ Ponieważ zadanie minimalizacji odległości między poziomami odniesienia a wartościami wyjść może mieć niejednoznaczne rozwiązanie, dobrze jest określić również wartości odniesienia dla zmiennych decyzyjnych

  $$x_{i,ref} : i \in I_{x,ref} \subset \{1, \ldots, n\}$$

  $I_{x,ref}$ - oznacza zbiór indeksów zmiennych decyzyjnych, dla których określono wartości odniesienia.
  Jest to równoważne zdefiniowaniu wektora poziomów odniesienia dla zmiennych decyzyjnych: $\tilde{\mathbf{x}}_{ref} \in \mathbb{R}^{\tilde{n}},\ 0 \leq \tilde{n} \leq n$ oraz wektora tych zmiennych decyzyjnych, dla których zdefiniowano poziomy odniesienia: $\tilde{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^{\tilde{n}},\ 0 \leq \tilde{n} \leq n$ Tak więc problem uogólnionej inwersji modelu posiada następującą formę:

  $$\text{minimize}\, \|\tilde{y} - \tilde{y}_{ref}\| + \rho \|\tilde{x} - \tilde{x}_{ref}\| \tag{2.2.3}$$

  przy ograniczeniach:

  $$\begin{aligned} \mathbf{y} &= \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{z}, \mathbf{y}) \\ \mathbf{x}_d(\mathbf{z}) &\leq \mathbf{x} \leq \mathbf{x}_g(\mathbf{z}) \\ \mathbf{y}_d(\mathbf{z}) &\leq \mathbf{y} \leq \mathbf{y}_g(\mathbf{z}) \\ \mathbf{z}_d &\leq \mathbf{z} \leq \mathbf{z}_g \end{aligned}$$

  Oznaczenia zostały podane przy równaniach modelu (2.2.1).
  Dobierając odpowiednio współczynnik ρ możemy ustalać, czy ważniejsze jest znalezienie wartości bliskich wartością odniesienia dla zmiennych wyjściowych, czy dla zmiennych decyzyjnych.

- *Optymalizacja jednokryterialna.*
  Użytkownik może wybrać jedno z wyjść modelu jako funkcje celu zadania optymalizacji jednokryterialnej o następującej postaci:

  $$\text{minimize} / \text{maximize} \quad y_{l_k} = f_{l_k}(\mathbf{x}, \mathbf{z}, \mathbf{y}) \tag{2.2.4}$$

przy ograniczeniach

$$\begin{aligned}\mathbf{y} &= \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{z}, \mathbf{y}) \\ \mathbf{x}_d(\mathbf{z}) \leq &\mathbf{x} \leq \mathbf{x}_g(\mathbf{z}) \\ \mathbf{y}_d(\mathbf{z}) \leq &\mathbf{y} \leq \mathbf{y}_g(\mathbf{z}) \\ \mathbf{z}_d \leq &\mathbf{z} \leq \mathbf{z}_g\end{aligned}$$

gdzie $l_k \in 1, \ldots, m$ oznacza indeks zmiennej wyjściowej wybranej jako kryterium. Pozostałe oznaczenia zostały podane przy równaniach modelu (2.2.1).

Istotne znaczenie przy rozwiązywaniu zadania optymalizacji nieliniowej ma metoda optymalizacji. Ponieważ efektywność tych metod zależy od klasy zadań optymalizacji, w systemie który ma służyć do rozwiązywania różnego rodzaju problemów powinna być również możliwość wyboru algorytmu optymalizacji we wstępnym etapie obliczeń.

- *Optymalizacja wielokryterialna.*
  Zagadnienie to jest omówione szczegółowo w następnym podrozdziale.

- *Analiza parametryczna i wrażliwości.*
  W trakcie budowy modelu użytkownik powinien również mieć możliwość przeprowadzenia wyżej wymienionych eksperymentów przy zmieniających się parametrach modelu. Ponadto powinien być zapewniony mechanizm umożliwiający zbadanie wpływu różnorodnych zmian parametru na rozwiązanie, czyli analizę wrażliwości (lokalną dla małych zmian parametrów lub globalną dla zmian większych). Analiza wrażliwości może być przy tym oparta na skończonych zmianach parametrów, bądź też na obliczaniu różniczek i (lub) subróżniczek funkcji modelu.

2.2.3. Modelowanie preferencji użytkownika

Model rzeczowy sytuacji decyzyjnej określa zależności między zmiennymi decyzyjnymi i ich konsekwencjami oraz określa zbiór decyzji dopuszczalnych. W modelu reprezentującym sytuację decyzyjną można, oprócz modelu rzeczowego sytuacji decyzyjnej, wyróżnić ponadto model preferencji użytkownika. Przy formułowaniu opisu problemu decyzyjnego za pomocą modeli analitycznych niejednokrotnie trudno jest wyróżnić wyraźnie fazę formułowania modelu rzeczowego i fazę modelowania preferencji, ze względu na ich wzajemne zależności. Jednakże rozróżnienie tych dwóch modeli pozwala na głębsze zrozumienie modelowanego problemu.

Rozważmy dwa wektory $\mathbf{x}'$, $\mathbf{x}'' \in \mathbf{X}$ z przestrzeni zmiennych decyzyjnych, które reprezentują dwie różne decyzje. Przy porównaniu dwóch różnych decyzji mogą wystąpić cztery sytuacje podstawowe (Roy, 1990):

- równoważność decyzji $\mathbf{x}'$, $\mathbf{x}''$ (relacja ta obejmuje również przypadek nierozróżnialności)
- silna preferencja decyzji $\mathbf{x}'$ nad $\mathbf{x}''$ lub silna preferencja decyzji $\mathbf{x}''$ nad $\mathbf{x}'$
- słaba preferencja decyzji $\mathbf{x}'$ nad $\mathbf{x}''$ lub słaba preferencja decyzji $\mathbf{x}''$ nad $\mathbf{x}'$

- sytuacja nieporównywalności $\mathbf{x}'$, $\mathbf{x}''$

Na podstawie aksjomatu o ograniczonej porównywalności (Roy, 1990, aksjomat 7.1.1) można sformułować pojęcie modelu preferencji.

Definicja 2.2.1 **Modelem preferencji** *nazywamy model, który każdej parze wektorów* $\mathbf{x}', \mathbf{x}'' \in \mathbf{X}$, $\mathbf{x}' \neq \mathbf{x}''$ *przypisuje jedną, dwie lub trzy spośród czterech wzajemnie się wykluczających sytuacji podstawowych(równoważności, silnej preferencji, słabej preferencji i nieporównywalności).*

Model preferencji może przyjmować różne postaci, z których podstawowymi dla teorii decyzji są: relacje preferencji, funkcja wartości, funkcja użyteczności.

Analiza modelu preferencji w postaci funkcji wartości lub użyteczności jest przedmiotem zainteresowania klasycznej teorii decyzji (Keeney i Raiffa, 1976). Poniżej zostanie omówiony model relacyjny, który posłuży jako punkt wyjścia do budowy innych reprezentacji modelu preferencji.

Relacją binarną określoną w niepustym zbiorze A nazywamy dowolny zbiór par (x, y), elementów zbioru A, czyli podzbiór iloczynu kartezjańskiego $A \times A$.

Oznaczmy przez $x' \mathcal{R} x''$ relację między elementami x' i x'', $x', x'' \in X$. Relację $\mathcal{R}$ nazywamy:

(i) zwrotną, jeśli
$x' \mathcal{R} x', \forall x' \in X$

(ii) przeciwzwrotną, jeśli
$\sim (x' \mathcal{R} x'), \forall x' \in X$

(iii) symetryczną, jeśli
$x' \mathcal{R} x'' \Longrightarrow x'' \mathcal{R} x'$

(iv) asymetryczną, jeśli
$x' \mathcal{R} x'' \Longrightarrow \sim (x'' \mathcal{R} x')$

(v) przechodnią, jeśli
$x' \mathcal{R} x''$ i $x'' \mathcal{R} x'''$ to $x' \mathcal{R} x''' \in X$, $\forall x', x'', x'''$

(vi) zupełną, jeśli
$\forall x', x'' \in X$ jest spełniona przynajmniej jedna z relacji: $x' \mathcal{R} x''$ lub $x'' \mathcal{R} x'$

Relacja $\mathcal{R}$ wprowadza *porządek zupełny*, jeżeli jest zwrotna, przechodnia i zupełna, natomiast *porządek częściowy*, jeżeli spełnia tylko własność zwrotności i przechodniości.

Cztery sytuacje podstawowe mogą być reprezentowane za pomocą relacji binarnych. Oznaczmy te relacje następująco:

- $\sim$ - relacja równoważności
- $\succ$ - relacja silnej preferencji
- $\succeq$ - relacja słabej preferencji
- ? - relacja nieporównywalności

Powyższe relacje preferencji w różny sposób mogą być wykorzystane do modelowania całości preferencji. Jedną z możliwości jest przyjęcie dla każdej pary wariantów tylko jednej z sytuacji podstawowych, inną możliwością jest dopuszczenie przypisania dla każdej pary wariantów dwóch lub trzech sytuacji podstawowych (mamy wówczas do czynienia z relacjami zgrupowanymi). Przykładem relacji zgrupowanej, która jest często wykorzystywana w praktyce jest relacja przewyższania, którą można zdefiniować następująco: $S : \{x' \; S \; x'' \Longrightarrow x' \sim x'' \;\; or \;\; x' \succ x'' \;\; or \;\; x' \succeq x''\}$.

Wprowadza się ponadto pojęcie *systemu relacyjnego preferencji*, który jest modelem preferencji użytkownika na określonym zbiorze wariantów lub ich obrazów, przy czym może on być podstawowym system relacyjnym preferencji lub zgrupowanym system relacyjnym preferencji. Podstawowy system relacji preferencji zawiera cztery podstawowe relacje, a ponadto zakłada się własność zupełności (dla dowolnej pary x' i x'', $x', \; x'' \in X$, co najmniej jedna relacja jest prawdziwa), oraz własność wykluczania (dla dowolnej pary x' i x'',$x', \; x'' \in X$, co najwyżej jedna relacja jest prawdziwa). Zgrupowany system relacji preferencji oprócz relacji podstawowych zawiera ponadto pięć relacji zgrupowanych. Są to relacje braku preferencji $(x' \sim x'' \;\; or \;\; x' \; ? \; x'')$, preferencji $(x' \succ x'' \;\; or \;\; x' \succeq x'')$, przypuszczenia preferencji $(x' \sim x'' \;\; or \;\; x' \succeq x'')$, K-preferencji $(x' \succ x'' \;\; or \;\; x' \; ? \; x'')$ i przewyższania.

Samo wprowadzenie systemu relacyjnego preferencji jest jeszcze niewystarczające. Aby uzyskać modele preferencji interesujące z punktu widzenia praktycznego i teoretycznego system taki powinien posiadać określoną strukturę np. porządku zupełnego, preporządku częściowego itd.

W praktyce decyzyjnej decyzje są oceniane na podstawie odpowiednio dobranego zbioru kryteriów. Wprowadzone systemy relacyjne odnosiły się do zbioru decyzji dopuszczalnych, jednakże pozwolą one dalej formułować równoważne modele preferencji z wykorzystaniem kryteriów. W literaturze poświęconej analizie wielokryterialnej najczęściej zakłada się, że dysponujemy pewnym zbiorem kryteriów. Na istotne znaczenie doboru kryteriów w procesie modelowania preferencji zwraca uwagę Roy (Roy, 1990). Wyróżnia on kilka faz modelowania preferencji, które prowadzą do sformułowania kryteriów. Zwraca jednocześnie uwagę na fakt, że fazy poprzedzające sformułowanie kryteriów szybko idą w zapomnienie. Po ich zdefiniowaniu, ich analiza staje się jedyną podstawą do wyboru i analizy decyzji. Istotne jest zatem, aby kryteria były dobrze zrozumiałe dla uczestników procesu decyzyjnego i były zgodne z modelem preferencji użytkownika.

Faza doboru kryteriów jest zatem procesem iteracyjnym polegającym na określeniu wyjść modelu rzeczowego, które będą kryteriami, prowadzeniu obliczeń i analizy rezultatów. Może to prowadzić do wyboru innych kryteriów lub dodaniu nowych, które wzbogacą model rzeczowy sytuacji decyzyjnej. Ten proces iteracyjny pozwoli dobrać reprezentatywny zbiór kryteriów. W trakcie procesu doboru kryteriów należy określić ich typ. Oprócz tradycyjnie wprowadzonych kryteriów minimalizowanych i maksymalizowanych celowe z punktu widzenia praktycznego jest wprowadzenie kryterium stabilizowanego. W przypadku kryterium stabilizowanego użytkownik określa wartość, którą chciałby osiągnąć dla tego kryterium. Przykłady wykorzystania tego typu kryterium do analizy modelu rzeczowego można znaleźć w pracy (Wierzbicki i Granat, 1996). Określenie typu kryterium wynika często w sposób naturalny z wyboru wielkości wyjściowej. Przykładowo, jeżeli jednym z kryteriów są koszty realizacji jakiegoś przedsięwzięcia, to naturalnym będzie wybór tego kryterium jako kryterium minimalizowanego lub stabilizowanego. Wybór tego kryterium jako maksymalizowanego byłby sprzeczny z intuicyjną wiedzą związaną z analizowanym problemem.

Przez $\mathbf{q}$ oznaczmy wektor kryteriów, a przez I_q zbiór indeksów wyjść modelu, które zostały wybrane jako kryteria. Dokonując wyboru kryteriów wybieramy zatem pewną podprzestrzeń $E_q \subset E_y$, $E_q = \mathbb{R}^p$ i $p \leq m$. Elementy q_j wektora $\mathbf{q}$ zdefiniowane są następująco:

$$q_j = F_i(\mathbf{x}, \mathbf{z}, \mathbf{y}) : i \in I_q \subset \{1, \ldots, m\}$$

Zatem zadanie analizy wielokryterialnej można sformułować następująco:

$$\text{minimize / maximize / stabilize} \quad \mathbf{q}(\mathbf{x}, \mathbf{z}, \mathbf{y}) \tag{2.2.5}$$

przy ograniczeniach

$$\begin{gathered} \mathbf{y} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{z}, \mathbf{y}) \\ \mathbf{x}_d(\mathbf{z}) \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{x}_g(\mathbf{z}) \\ \mathbf{y}_d(\mathbf{z}) \leq \mathbf{y} \leq \mathbf{y}_g(\mathbf{z}) \\ \mathbf{z}_d \leq \mathbf{z} \leq \mathbf{z}_g \end{gathered}$$

gdzie

$\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^m$,
$\mathbf{q} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^p$,
$\mathbf{q}=(q_0, ..., q_{p_0}, q_{p_0+1}, ..., q_{p_1}, q_{p_1+1}, \ldots, q_p)$
p_0 - liczba kryteriów minimalizowanych
$p_1 - p_0$ - liczba kryteriów maksymalizowanych
$p - p_1$ - liczba kryteriów stabilizowanych

Pierwszych p_0 elementów wektora $\mathbf{q}$ stanowią kryteria minimalizowane, następne $p_1 - p_0$ elementów stanowią kryteria maksymalizowane, a ostatnich $p - p_1$ elementów stanowią kryteria stabilizowane.

W przypadku zadania optymalizacji jednokryterialnej, poprzez rozwiązanie rozumie się znalezienie takich wartości zmiennych decyzyjnych, które minimalizują bądź maksymalizują wskaźnik jakości. Natomiast zadanie optymalizacji wielokryterialnej ma przeważnie wiele lub nieskończenie wiele rozwiązań, a więc nie jest dobrze postawione, w ścisłym znaczeniu tego pojęcia. Dąży się zatem do znalezienia rozwiązania najbardziej zgodnego z preferencjami decydenta.

Z punktu widzenia algorytmów służących do analizy zbiorów osiągalnych wartości kryteriów , czy ze względów teoretycznych przydatne też są inne reprezentacje relacji preferencji. Szczególnie użyteczne jest wykorzystanie w modelu preferencji różnych postaci stożków.

Definicja 2.2.2 *Zbiór $C \subset \mathbb{R}^p$ jest stożkiem, jeśli $\mathbf{q} \in C \Rightarrow \alpha\mathbf{q} \in C$, dla każdego $\alpha \geq 0$. Jeżeli zbiór C jest domknięty, to stożek C jest stożkiem domkniętym*

Rozważmy stożek dodatni, który jest zdefiniowany następująco:

$$C = \mathbb{R}^p_+ = \{\mathbf{q} \in \mathbb{R}^p : q_i \geq 0, i = 1, \ldots p\}$$

Wykorzystując stożek dodatni C można analizować rozwiązania zadania (2.2.5) dla kryteriów maksymalizowanych (a z niewielkimi uogólnieniami także minimalizowanych). W dalszej części tego podrozdziału zostanie on rozszerzony, aby obejmował również kryteria stabilizowane. Początkowo założymy zatem, że w sformułowaniu zadania (2.2.5) $p_1 = p$.

Zdefiniujmy następujące relacje dominacji w przestrzeni kryteriów:

(i) słabej dominacji

$$\mathbf{q}' \succ_C \mathbf{q}'' \iff \mathbf{q}' - \mathbf{q}'' \in C$$

co oznacza, że $q_i' \geq q_i''$ dla $i = 1, \ldots, p$

(ii) ścisłej dominacji

$$\mathbf{q}' \succ_{\tilde{C}} \mathbf{q}'' \iff \mathbf{q}' - \mathbf{q}'' \in \tilde{C} = C \setminus \{0\}$$

co oznacza, że $q_i' \geq q_i''$ dla $i = 1, \ldots, p$, ale przynajmniej; jedna z nierówności jest ostra $q_i' > q_i''$

(iii) silnej dominacji

$$\mathbf{q}' \succ_{\operatorname{int} C} \mathbf{q}'' \iff \mathbf{q}' - \mathbf{q}'' \in \operatorname{int} C$$

co oznacza, że $q_i > q_i''$ dla $i = 1, \ldots, p$, gdzie $\operatorname{int} C$ - wnętrze stożka C

Relacje te są bardzo prostymi modelami preferencji użytkownika, dla których zachodzi zależność [1]

$$\mathbf{q}' \succeq_C \mathbf{q}'' \iff \mathbf{x}' \succ_K \mathbf{x}''$$

gdzie K jest stożkiem zdefiniowanym w przestrzeni zmiennych decyzyjnych

Ponadto dominacja **q**' nad **q**" implikuje relację przewyższania **x**' nad **x**".

$$\mathbf{x}' \succeq_C \mathbf{x}'' \Longrightarrow \mathbf{x}' S \mathbf{x}''$$

Prosty model preferencji z powyższymi relacjami pozwala jednak dokonać redukcji zbioru możliwych rozwiązań zadania (2.2.5) do zbioru rozwiązań sprawnych.

Oznaczmy przez Q ($Q \subset E_q$) zbiór osiągalnych wartości kryteriów, tzn. Q jest zbiorem takich wektorów $\mathbf{q}(\mathbf{x}, \mathbf{z}, \mathbf{y})$, że $\mathbf{x}$ i $\mathbf{y}$ spełniają ograniczenia modelu (2.2.5), przy danym $\mathbf{z}$.

Definicja 2.2.3 (Zbiór rozwiązań C-sprawnych) *Dla danego zbioru osiągalnych wartości kryteriów Q i stożka C zbiór rozwiązań C-sprawnych jest definiowany w następujący sposób:*

$$\mathcal{E}_{\tilde{C}} = \{\hat{q} \in Q : Q \cap (\hat{q} + C \setminus \{0\}) = \emptyset\}$$

Zbiór ten jest nazywany również (dokładniej mówiąc, tylko w przypadku $C = \mathbb{R}_+^p$) **zbiorem rozwiązań Pareto-optymalnych**. Dodatkowo definiuje się zbiór rozwiązań słabo sprawnych, którego analiza jest łatwiejsza z punktu widzenia teoretycznego, natomiast ma on znacznie mniejsze znaczenie praktyczne.

[1] Zamiast relacji $\succ_C$ w poniższych zależnościach może wystąpić $\succ_{\tilde{C}}$ lub $\succ_{\operatorname{int} C}$

Definicja 2.2.4 (Zbiór rozwiązań słabo C-sprawnych) *Dla danego zbioru osiągalnych wartości kryteriów Q i stożka C zbiór rozwiązań słabo C-sprawnych jest definiowany w następujący sposób:*

$$\mathcal{E}_{\mathrm{int}\, C} = \{\hat{q} \in Q : Q \cap (\hat{q} + \mathrm{int}\, C) = \emptyset\}$$

Zbiór ten nazywany jest również **zbiorem rozwiązań słabo Pareto-optymalnych** (jeśli $C = \mathbb{R}^p_+$).

Zarówno zbiór rozwiązań C-sprawnych, jak i zbiór rozwiązań słabo C-sprawnych zawierają elementy z nieograniczonymi współczynnikami wymiany, czyli takie, że przy niewielkiej zmianie jednego z kryteriów występują duże zmiany kryteriów pozostałych. Współczynniki wymiany mogą być definiowane jako lokalne lub globalne.

Lokalne współczynniki wymiany można definiować następująco:

$$t_{ij}(\hat{q}) = \lim_{\mathbf{q} \to \hat{\mathbf{q}}} \frac{(q_i - \hat{q}_i)}{(\hat{q}_j - q_j)}, \quad i \neq j, \quad j = 1, \dots p$$

przy czym ciąg elementów $\mathbf{q}$ dążący do danego $\hat{\mathbf{q}} \in \mathcal{E}_{\tilde{C}}$, jest tak dobrany, że $\mathbf{q} \in \mathcal{E}_{\tilde{C}}$ oraz $q_k = \hat{q}_k$ dla $k \neq i$ i $k \neq j$.

Natomiast globalne współczynniki wymiany są określone następująco:

$$t^G_{ij}(\hat{q}) = \sup_{q \in Q^j(\hat{q})} \frac{(q_i - \hat{q}_i)}{(\hat{q}_j - q_j)}$$

gdzie zbiór $Q^j(\hat{q})$ jest określony następująco:

$$Q^j(\hat{q}) = \{q \in Q : q_j < \hat{q}_j, \quad q_i \geq \hat{q}_i \quad \text{dla} \quad i \neq j\}$$

Globalne współczynniki wymiany są równe lokalnym dla zbiorów wypukłych. Mając określone współczynniki wymiany można zdefiniować pojęcie zbioru rozwiązań właściwie sprawnych. Różne definicje tego zbioru zostały podane w (Sawaragi, Nakayama i Tanino, 1985).

Definicja 2.2.5 (Geoffrion,1968) *Zbiór rozwiązań właściwie sprawnych jest to część zbioru rozwiązań sprawnych, dla których współczynniki wymiany są ograniczone.*

Definicja rezultatów właściwie sprawnych wyklucza tylko te rezultaty sprawne, dla których współczynniki wymiany są nieskończone. Najbardziej interesujący z punktu widzenia praktycznego jest zbiór rozwiązań właściwie C-sprawny z ograniczonymi *a priori* współczynnikami wymiany.

Definicja 2.2.6 *Zbiór rozwiązań właściwie sprawnych z ograniczonymi a priori współczynnikami wymiany jest to część zbioru rozwiązań sprawnych, dla których współczynniki wymiany są mniejsze od danej liczby M.*

Wierzbicki (1986) wyraża powyższą definicję w oparciu o stożkowe ϵ-otoczenie stożka C.

$$C(\epsilon) = \{\mathbf{q} \in \mathbb{R}^l : \mathrm{dist}(\mathbf{q}, C) \leq \epsilon \|\mathbf{q}\|\}$$

gdzie $\epsilon > 0$

Definicja 2.2.7 (Zbiór rozwiązań C_ϵ sprawnych) *Zbiór rozwiązań właściwie C_ϵ-sprawnych definiowany jest w następujący sposób:*

$$\mathcal{E}_{C_\epsilon} = \{\hat{q} \in Q : Q \cap (\hat{q} + \operatorname{int} C_\epsilon) = \emptyset\}$$

Zależności między poszczególnymi zbiorami są następujące:

$$\mathcal{E}_{C_\epsilon} \subset \mathcal{E}_C \subset \mathcal{E}_{\operatorname{int} C}$$

Do tej pory, w definicjach stożków były pomijane kryteria stabilizowane. Możemy je uwzględnić definiując stożek w następujący sposób:

$$C_s = \{q \in \mathbb{R}^p : q_i \geq 0, i = 1, \ldots, p_1, q_i = 0, i = p_1 + 1 \ldots, p\}$$

Stożek C_s odpowiada maksymalizacji kryteriów: $1, \ldots, p_1$ (dla kryteriów minimalizowanych zmienia się znak na przeciwny) i stabilizacji kryteriów: $p_1 + 1, \ldots, p$.

Gdy występują kryteria stabilizowane, warto rozróżnić dwie klasy problemów:

1. W sformułowaniu zadania występują zarówno kryteria stabilizowane jak i minimalizowane lub maksymalizowane ($p_1 > 0$, $p > p_1$). Poszukujemy zatem nadal rozwiązań z powyżej zdefiniowanego zbioru rozwiązań sprawnych. Wybór typów niektórych kryteriów jako stabilizowanych i ustalenie dla nich wartości, wokół których chcemy stabilizować wartości kryteriów, prowadzi do zawężenia zbioru rozwiązań spełniających preferencje użytkownika. Oznaczmy zbiór rozwiązań w tym przypadku przez $\mathcal{E}_{C_{s,T}}$ (T jest przy tym wartością, wokół której chcemy stabilizować rozwiązanie.)

2. W sformułowaniu zadania występują tylko kryteria stabilizowane, czyli $p_1 = 0$ i $p > 0$. Oznaczmy tego typu stożek przez C_Q (należy zwrócić uwagę, że $C_Q = \{0\}$. Dla tej klasy problemów zbiorem możliwych rozwiązań jest zbiór Q, czyli każda dopuszczalna wartość $\mathbf{q}$ może być rozwiązaniem. Oznaczmy w tym przypadku zbiór rozwiązań przez $\mathcal{E}_{C_{Q,T}}$. Ta klasa problemów wiąże się z programowaniem celowym.

Uwzględniając kryteria stabilizowane mamy zatem następujące zależności:

$$\mathcal{E}_{C_{s,T}} \subset \mathcal{E}_{C_\epsilon} \subset \mathcal{E}_C \subset \mathcal{E}_{\operatorname{int} C} \subset \mathcal{E}_{C_{Q,T}}$$

Rozróżnienie powyższych klas problemów związanych z kryteriami stabilizowanymi pozwala na różne wykorzystanie tego typu kryteriów w analizie zadania wielokryterialnego.

W ramach pierwszej klasy problemów można ponadto wyróżnić dwa przypadki. W pierwszym przypadku *a priori* wiemy, jaka wartość danego kryteriów nas interesuje. Przykładowo, przy projektowaniu przekładni zębatej (patrz przykład w podrozdziale 2.4.1) dążymy do zachowania określonego wymiaru. Nie interesuje nas minimalizacja, czy maksymalizacja tej wielkości, tylko rozwiązanie w pobliżu zadanej wartości. Drugi przypadek zachodzi wówczas, gdy typ kryterium został wybrany jako minimalizowany lub stabilizowany i w trakcie procesu interakcji użytkownik osiągnął zadawalającą wartość kryterium i decyduje się, aby stabilizować wartość określonego kryterium wokół uzyskanej wartości i próbować analizować pozostałe kryteria. Przypadki te różnią się ponadto różnym sposobem liczenia punktu utopijnego i nadiru (patrz dalsze wyjaśnienia).

Druga klasa problemów jest szczególnie istotna przy analizie modelu rzeczowego sytuacji decyzyjnej. Użytkownik specyfikuje wartości kryteriów i poszukuje wektorów zmiennych decyzyjnych, które zapewnią poszukiwane wartości kryteriów; jest to przypadek symulacji odwrotnej. W obydwu klasach problemów kryteria stabilizowane są traktowane jako pewien rodzaj ograniczeń "miękkich", czyli takich, że dopuszczamy możliwość ich niespełnienia.

W różnych metodach rozwiązania zadania (2.2.5) korzystne jest również obliczenie punktów, które pozwalają na oszacowanie zbioru rozwiązań sprawnych. Punkty te noszą nazwę punktów utopii i nadiru. Składowe punktu utopii $\mathbf{q}_u = (q_{ui}, \ldots, q_{up})$ dla przypadku kryteriów minimalizowanych i maksymalizowanych można obliczyć następująco:

$$q_{iu} = \min_{\mathbf{q} \in Q} q_i, \quad i = 1, \ldots, p_0$$

$$q_{iu} = \max_{\mathbf{q} \in Q} q_i, \quad i = p_0 + 1, \ldots, p_1$$

Dla kryterium stabilizowanego odpowiednia współrzędna punktu utopii jest równa wartości poziomu stabilizacji T. W pierwszej klasie problemów w drugim przypadku, gdy kryterium jest typu minimalizowanego lub stabilizowanego i dopiero w fazie interakcji przełączamy się na kryterium stabilizowane, składowa punktu utopii jest liczona tak jak dla kryterium minimalizowanego lub maksymalizowanego.

Dokładne obliczenie punktu nadiru jest złożonym procesem obliczeniowym. Często wystarcza tylko oszacowanie tego punktu, które określa się jako najgorszą wartość dopuszczalną kryterium, która się pojawiła się w trakcie obliczeń. Dla kryterium minimalizowanego będzie to największa wartość, natomiast dla kryterium maksymalizowanego - jego najmniejsza wartość. Dla kryterium typu stabilizowanego należy oszacować dwie wartości, a mianowicie największe i najmniejsze odchylenie od wartości poziomu stabilizowanego. Oczywiście jest to tylko jedna z możliwości oszacowania punktu nadiru i w złożonych problemach, zwłaszcza nieliniowych, metoda ta może zawodzić.

W następnym podrozdziale zostaną przedstawione różne podejścia do rozwiązań zadania (2.2.5), natomiast w następnym rozdziale będą kontynuowane zagadnienia związane z modelowaniem preferencji użytkownika.

Prosty model preferencji oparty o relację dominacji pozwala na wyodrębnienie zbioru rozwiązań sprawnych - o różnych szczególnych własnościach - ze zbioru rozwiązań dopuszczalnych. Zbiór ten jest zbyt liczny, co powoduje konieczność opracowania metod pozwalających na wybór rozwiązania zgodnego z preferencjami użytkownika. Dalsza redukcja zbioru rozwiązań sprawnych jest możliwa po uzyskaniu dodatkowej informacji preferencjnej od użytkownika. Podstawowe podejścia do rozwiązywania zadań analizy wielokryterialnej wykorzystujące dodatkową informację preferencyjną zostały przedstawione w podrozdziale 3.

Obecnie zajmiemy się metodami konstruktywnymi, które wspomagają proces zdobywania wiedzy o analizowanym problemie, a co za tym idzie również wzbogacania wiedzy o preferencjach. W podejściu tym zakłada się, że użytkownik specyfikuje swoje preferencje w trakcie procesu interakcji i preferencje te mogą się zmieniać w miarę wzbogacania wiedzy o modelowanym problemie.

Podejście konstruktywne, zaproponowane przez Roy (1990) odnosi się w zasadzie tylko do modelowania preferencji. W przypadku modelowania sytuacji decyzyjnej bardzo często nie da się rozróżnić wyraźnie budowy modelu rzeczowego od modelowania preferencji użytkownika. Złożoność analizowanych problemów powoduje, że proces modelowania sytuacji decyzyjnej obejmuje zarówno konstruowanie modelu rzeczowego sytuacji decyzyjnej jak również konstruowanie modelu preferencji. Możemy tutaj wyróżnić następujące fazy budowy modelu i jego wykorzystania w analizie sytuacji decyzyjnej:

1. Sformułowanie modelu rzeczowego sytuacji decyzyjnej w postaci analitycznej.

2. Sformułowanie problemu do analizy wielokryterialnej. W fazie tej następuje wybór kryteriów oraz określenie ich typów.

3. Wybór lub budowa modelu preferencji. Zagadnienie modelowania preferencji jest niejednokrotnie trudniejsze od sformułowania modelu rzeczowego. Możemy wyróżnić tutaj modele relacyjne, które mają zarówno znaczenie teoretyczne jak i pozwalają na konstruowanie narzędzi obliczeniowych pozwalających na numeryczne wyznaczanie rozwiązań zgodnych z określonym modelem preferencji. Z przedstawionego przeglądu w podrozdziale 3 wynika, że w procesie modelowania często wykorzystywany jest więcej niż jeden relacyjny model preferencji. Modelem podstawowym jest relacja dominacji, która pozwala na wyodrębnienie zbioru rozwiązań sprawnych. Ze względu na to, że zbiór ten jest zbyt liczny, pojawia się konieczność uwzględnienia dodatkowej informacji od użytkownika w procesie modelowania. Roy (1990) rozróżnia tutaj wyraźnie dwie warstwy: warstwę formalną, która związana jest z modelem preferencji oraz warstwę informacyjną, która określa zasady komunikacji z użytkownikiem. Informacja preferencyjna jest wykorzystywana w każdej iteracji do generacji jednego lub kilku rozwiązań sprawnych, które następnie są prezentowane użytkownikowi. Pojawia się zatem konieczność opracowania nie tylko modelu preferencji, który w procedurach interaktywnych jest stosunkowo prosty, ale określenia procedury dialogu z użytkownikiem, która ma zasadnicze znaczenie. Należy zatem sprecyzować w jakiej formie użytkownik powinien dostarczać informacje do systemu, oraz jak prezentować użytkownikowi uzyskane rezultaty obliczeń. Oprócz tego konieczne jest opracowanie kryterium syntetycznego, które agreguje wybrane wcześniej kryteria, uwzględnia informację preferencyjną oraz jest wykorzystywane do generacji rozwiązań sprawnych w każdej iteracji. W przypadku, gdy dopuszcza się nieporównywalność wariantów, należy opracować testy przewyższania.

4. Dostarczenie użytkownikowi informacji pomocniczych niezwiązanych bezpośrednio z procedurą interaktywną, co jest przydatne dla oceny zakresu zmienności kryteriów. Do tego typu informacji można zaliczyć np. punkt utopii, punkt nadiru. Przed rozpoczęciem procesu interakcji konieczne jest przeprowadzenie dodatkowych obliczeń wstępnych.

5. Interaktywne przeglądanie zbioru rozwiązań sprawnych. W kolejnych iteracjach, użytkownik specyfikuje informację preferencyjną, rozwiązywane

są pomocnicze zadania optymalizacji, po czym prezentowane są w różnych formach użytkownikowi. W niektórych metodach prezentowana jest również informacja, która ułatwia polepszenie rozwiązania w kolejnym kroku (np. w metodzie Przeglądu Wiązką Światła (?) prezentowane jest otoczenie punktu centralnego).

W metodach zorientowanych na uczenie się preferencji można przyjąć stosunkowo prosty model preferencji, niezmienny w trakcie procesu interakcji; użytkownik ma wtedy wpływ na selekcję rozwiązań dostarczając informację preferencyjną. Przy opracowaniu interaktywnych metod analizy wielokryterialnej szczególną uwagę przywiązuje się do warstwy informacyjnej tzn. komunikacji użytkownika z systemem, metodą dostarczania informacji do systemu i jak i metodą prezentacji otrzymanych rozwiązań.

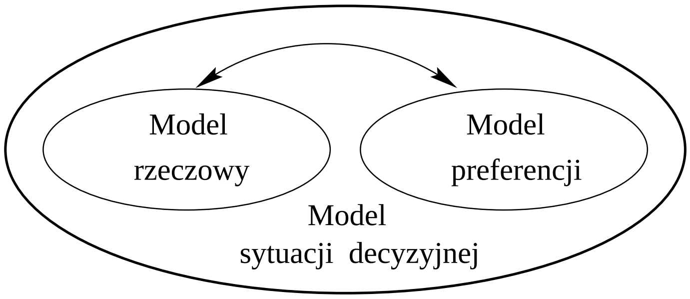
Pomimo istnienia różnorodnych metod rozwiązywania zadań analizy wielokryterialnej, ich zastosowanie w praktyce jest stosunkowo trudne. Wynika stąd między innymi konieczność opracowywania nowych metod interakcji, które będą kładły nacisk na udoskonalenie metod komunikacji z użytkownikiem. Interesujące możliwości może dać w tym zakresie wykorzystanie metod graficznych, które pozwalają na opracowywanie nowych jakościowo metod analizy zadań wielokryterialnych.

Niniejszy rozdział jest poświęcony metodzie specyfikacji preferencji użytkownika za pomocą funkcji realizacji celu. Przedstawione podejście łączy w sobie zalety szeroko rozpowszechnionych metod opartych o poziomy odniesienia oraz specyfikacji preferencji w terminologii zbiorów rozmytych.

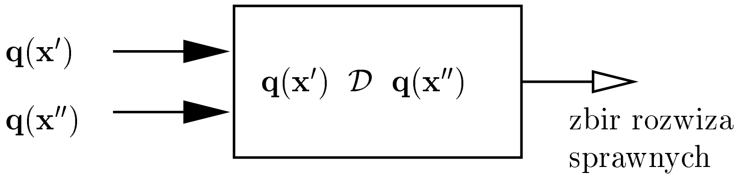
2.2.4. Koncepcja specyfikacji preferencji za pomocą funkcji realizacji celu

W poprzednim rozdziale wyróżniono w modelu sytuacji decyzyjnej jego dwie części: model rzeczowy sytuacji decyzyjnej i model preferencji (rys. 2.1). Modelowanie preferencji dotyczy nie tylko warstwy formalnej związanej ze sformułowaniem matematycznym modelu, ale dotyczy również warstwy informacyjnej określającej zasady komunikacji z użytkownikiem. Warstwa informacyjna niejednokrotnie decyduje o powodzeniu danej metody. W niniejszym rozdziale proponowana jest graficzna metoda specyfikacji informacji preferencyjnej za pomocą funkcji realizacji celu. Podejście ta pozwala na specyfikację preferencji w metodach wywodzących się z metodologii punktu odniesienia, ale jednocześnie forma prezentacji graficznej inspirowana jest przez metody rozwijane w oparciu o teorię zbiorów rozmytych.

Wybór graficznej formy interakcji został podyktowany wzrostem znaczenia metod interakcji graficznej we współczesnych systemach wspomagania decyzji, co pokazano w podrozdziale ??. Na prezentowaną metodę wywarł również wpływ rozwój metod rozwiązywania zadań wielokryterialnych wykorzystujących metodologię punktu odniesienia n.p. (Lewandowski i Wierzbicki, 1989; Nakayama i Sawaragi, 1984; Granat, Krglewski, Paczyski, Stachurski i Wierzbicki, 1995; Korhonen i Laakso, 1986). Doświadczenia zebrane przy stosowaniu tych metod pokazały, że wciąż istnieje konieczność udoskonalenia metod interakcji z użytkownikiem, a w szczególności dostarczenia narzędzi umożliwiających komunikację z użytkownikiem i analizę rezultatów w formie graficznej.

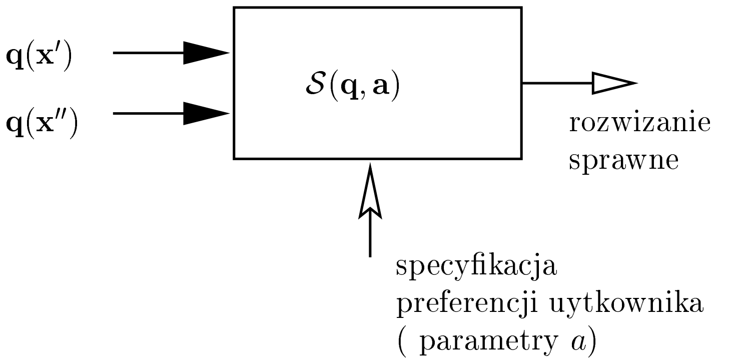


Rys. 2.1: Model sytuacji decyzyjnej



Rys. 2.2: Model preferencji w postaci relacji dominacji $\mathcal{D}$

Ponieważ prezentowana tu metoda zalicza się do metod interaktywnych, pojawia się więc pytanie, w jaki sposób uwzględnić preferencje użytkownika. Jedną z możliwości jest konstrukcja funkcji agregującej kryteria w jedno kryterium syntetyczne – tak zwanej funkcji skalaryzującej – i uzależnienie tej funkcji od informacji preferencyjnej specyfikowanej przez użytkownika. Przy czym funkcja skalaryzująca powinna być tak dobierana, aby generowała rozwiązanie sprawne zgodnie z przyjętym prostym modelem preferencji w postaci relacji dominacji $\mathcal{D}$ (patrz Rys. 2.2 i Rys. 2.3), taką funkcję skalaryzującą nazywamy zgodną z porządkiem (zob. Wierzbicki, 1986)). W języku matematycznym, informację preferencyjną można wyrazić poprzez zdefiniowanie odpowiednich parametrów



Rys. 2.3: Funkcja agregacji generująca rozwiązania sprawne w zależności od informacji preferencyjnej

preferencyjnych, od których będzie zależała funkcja skalaryzująca. Oznaczmy zbiór parametrów preferencyjnych przez Ω. Funkcja skalaryzująca ma zatem postać:

$$\mathcal{S}(\mathbf{q}, \mathbf{a})$$

gdzie $\mathbf{q} \in Q$ i $\mathbf{a} \in \Omega$.

Użytkownik może zadawać bezpośrednio parametry preferencyjne np. współczynników wagi, czy punktu odniesienia. Istotny jest wtedy taki dobór tych parametrów, aby były one łatwo interpretowalne. W niniejszym rozdziale zakłada się, że informacja preferencyjna specyfikowana będzie w formie graficznej. W tym wypadku istotna jest interpretowalność obrazu prezentowanego użytkownikowi, a nie poszczególnych parametrów od których uzależniona jest prezentacja graficzna. W prezentowanym obrazie dostarcza się zazwyczaj określony zestaw informacji związany z parametrami preferencyjnymi, ale uzupełniony również o dodatkową informację, która ułatwia określenie preferencji jak i ocenę uzyskiwanych rezultatów (np. punkt utopii i nadiru).

Postać funkcji skalaryzującej stosowanej w metodach punktu odniesienia jest następująca:

$$\mathcal{S}(\mathbf{q}, \bar{\mathbf{q}}, \underline{\mathbf{q}}) = \min_{1 \leq i \leq n} \eta_i(q_i, \bar{q}_i, \underline{q}_i) + \epsilon \sum_{i=1}^{n} \eta_i(q_i, \bar{q}_i, \underline{q}_i)$$

gdzie $\bar{q}, \underline{q}$ są odpowiednio poziomem aspiracji i rezerwacji, natomiast funkcja skalaryzująca charakteryzuje stopień realizacji tych poziomów.

W powyższym wzorze można wyróżnić funkcje $\eta_i(q_i, \bar{q}_i, \underline{q}_i)$, które mogą charakteryzować stopień realizacji celu dla poszczególnych kryteriów. Można zatem założyć, że w trakcie procesu interakcji użytkownik będzie wyrażał swoje preferencje specyfikując funkcję realizacji celu dla każdego z kryteriów. Dlatego też funkcje skalaryzującą o tej ogólnej postaci nazywamy funkcją osiągnięcia, złożoną z częściowych funkcji realizacji celu.

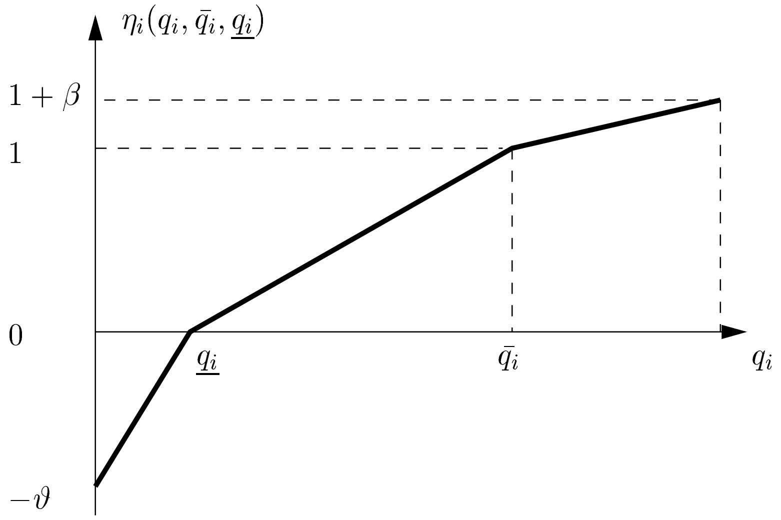
Częściowe funkcje realizacji celu są uzależnione od poziomu aspiracji i rezerwacji. Parametry te zaliczamy do podstawowych parametrów preferencyjnych, w odróżnieniu od parametrów pomocniczych, które będą określały przebieg funkcji realizacji celu między poziomem aspiracji i rezerwacji. Parametry pomocnicze niekoniecznie muszą być interpretowalne przez użytkownika, natomiast są użyteczne przy wprowadzeniu funkcji odcinkami liniowej. Ogólnie, częściową funkcję realizacji celu można przedstawić następująco:

$$\eta_i(q_i, \mathbf{a}^i)$$

gdzie $\mathbf{a}^i \in \Omega^i$ są parametrami dla kryterium i.

Zakłada się , że wartość funkcji realizacji celu jest równa jeden dla poziomu aspiracji i równa zeru dla poziomu rezerwacji. Przykład tego typu funkcji dla kryterium maksymalizowanego jest pokazany na rys. 2.4. Wybierając odpowiednią postać funkcji realizacji celu można łatwo uogólnić rozważania na przypadek kryteriów stabilizowanych. W tym wypadku wprowadza się cztery parametry podstawowe: dolny i górny poziom aspiracji $\bar{q}', \bar{q}''$ oraz dolny i górny poziom rezerwacji $\underline{q}', \underline{q}''$. Przebieg funkcji jest pokazany na rys. 2.5.

Zatem funkcja skalaryzująca zależy od wektora cząstkowych funkcji realizacji celu określonych dla każdego z kryteriów, ma więc postać:



Rys. 2.4: Przykład funkcji η_i dla kryterium maksymalizowanego

$$\mathcal{S}(\mathbf{q}, \underline{\eta}(\mathbf{q}, \mathbf{a}))) \tag{2.2.6}$$

gdzie $\mathbf{a} \in \Omega$ i $\Omega = \Omega^1 \cup \ldots \cup \Omega^p$, p - liczba kryteriów, $\underline{\eta}$ jest wektorem funkcji realizacji celu określonych dla poszczególnych kryteriów.

W takiej funkcji skalaryzującej nie są wprowadzone współczynniki wag, co oznacza, że osiągnięcie każdego z poziomów aspiracji jest dla decydenta jednakowo ważne; nie oznacza to jednak, że waga każdego z kryteriów dla tak zdefiniowanej nieliniowej funkcji skalaryzującej jest jednakowa. Najważniejszymi kryteriami stają się bowiem te, dla których najtrudniej osiągnąć poziom aspiracji. Można jednak dodatkowo wprowadzić współczynniki wagi, które by wprowadzały zróżnicowanie w ważności osiąganiu poziomów aspiracji, co prowadzi np. do funkcji skalaryzującej:

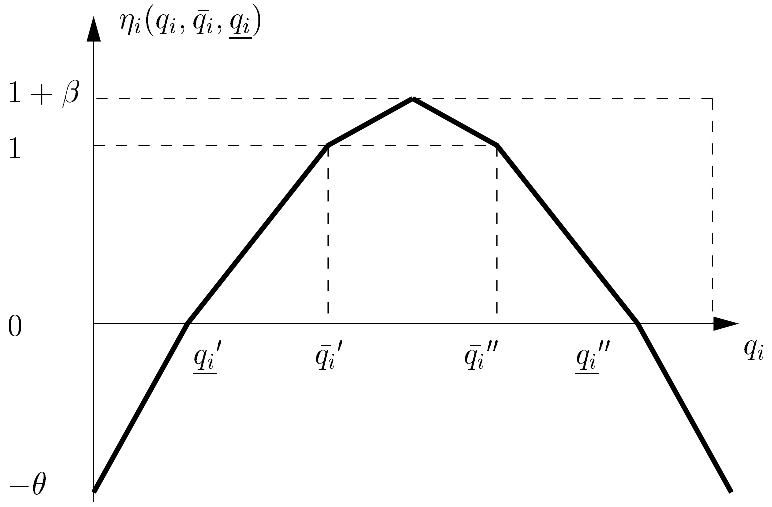
$$\mathcal{S}(\mathbf{q}, \underline{\eta}) = \min_{1 \le i \le n} w_i * \eta_i(q_i, \bar{q}_i, \underline{q}_i) + \epsilon \sum_{i=1}^{n} w_i * \eta_i(q_i, \bar{q}_i, \underline{q}_i)$$

gdzie $\bar{q}, \underline{q}$ są odpowiednio poziomem aspiracji i rezerwacji.

Jak zostanie pokazane w następnym podrozdziale, funkcja tego typu posiada własności teoretyczne pozwalające na generowanie rozwiązań sprawnych. Jednakże dla celów prezentacji graficznej podlega ona dalszym uproszczeniom. Użytkownikowi systemu można bowiem prezentować uproszczone funkcje cząstkowe realizacji celu:

$$\gamma_i(q_i, \mathbf{a}^i) = \begin{cases} 1 & \text{jeśli } \eta_i(q_i, \mathbf{a}^i) > 1 \\ \eta_i(q_i, \mathbf{a}^i) & \text{jeśli } 0 \le \eta_i(q_i, \mathbf{a}^i) \le 1 \\ 0 & \text{jeśli } \eta_i(q_i, \mathbf{a}^i) < 0 \end{cases}$$

Wykorzystanie funkcji η_i do obliczeń i funkcji γ_i do prezentacji graficznej wynika z rozbieżności między prostotą prezentacji graficznej, a zapewnieniem



Rys. 2.5: Przykład funkcji η_i dla kryterium stabilizowanego

odpowiednich własności funkcji skalaryzującej. Dodatkowo, uproszczenie to pozwala interpretować te funkcje jako funkcje przynależności zbioru rozmytego. Z punktu widzenia specyfikacji informacji preferencyjnej przez użytkownika funkcja realizacji celu może przyjmować tylko wartości pomiędzy 0 (która to wartość odpowiada realizacją gorszym od poziomu rezerwacji) i 1 (która to wartość odpowiada spełnieniu założonego poziomu aspiracji). Wartości funkcji realizacji celu powyżej 1 i poniżej 0 są wprowadzone ze względu na uzyskanie własności porządkujących funkcji skalaryzującej, jej zgodność z porządkiem, w całym zakresie możliwych wartości kryteriów.

Można przy tym rozpatrywać wyłącznie liniowy przebieg funkcji między poziomem aspiracji i rezerwacji, ale ze względu na związki interpretacyjne funkcji realizacji celu z funkcjami przynależności przydatne jest wprowadzenie też innych klas funkcji. W metodach rozwiązywania zadań wielokryterialnych w oparciu o teorię zbiorów rozmytych (zobacz (Seo i Sakawa, 1988), (Sakawa, 1993)) wprowadza się dodatkowo np. funkcje odcinkami liniowe, wykładnicze i hiperpoliczne. Jako podstawowe funkcje, wykorzystane w implementacji metody, zostały przyjęte funkcje liniowe i odcinkami liniowe ponieważ można je stosować z zarówno do analizy zadań liniowych jak i nieliniowych. Ponadto będziemy zakładać, że funkcje realizacji celu są wklęsłe. Wprowadzenie funkcji wykładniczych i hiperbolicznych do zadań liniowych wprowadza nieliniowości do rozpatrywanego zadania optymalizacji.

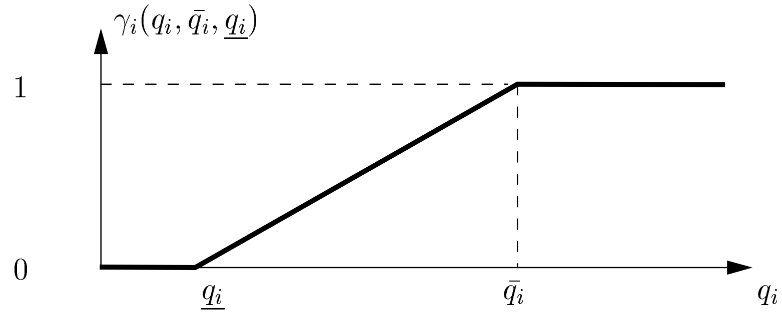
Oznaczmy:
$q_i = f_i(\mathbf{x})$,
$\underline{q}_i$ - poziom rezerwacji q_i,
$\bar{q}_i$ - poziom aspiracji q_i,
$\mathcal{M}_G = \mathcal{M}_{GMIN} \cup \mathcal{M}_{GMAX} \cup \mathcal{M}_{GS}$- klasy funkcji zdefiniowanych poniżej ($\mathcal{M}$ - klasa funkcji rozszerzonych utworzonych z funkcji należących do klasy $\mathcal{M}_G$).

Dla kryteriów maksymalizowanych zakładamy następujące klasy $\mathcal{M}_{GMAX}$ funkcji realizacji celu prezentowane użytkownikowi:

- liniowa (w przedziale rezerwacji-aspiracji)

$$\gamma_{q_i}(\mathbf{x}) = [q_i - \underline{q}_i]/[\bar{q}_i - \underline{q}_i] \quad \text{dla} \quad \underline{q}_i \leq q_i \leq \bar{q}_i \tag{2.2.7}$$

dla $q_i(\mathbf{x}) < \underline{q}_i \quad \gamma_{q_i}(\mathbf{x}) = 0$ i dla $q_i(\mathbf{x}) < \bar{q}_i \quad \gamma_{q_i}(\mathbf{x}) = 1$



Rys. 2.6: Liniowa funkcja realizacji celu prezentowana użytkownikowi dla kryterium maksymalizowanego

- odcinkami liniowa

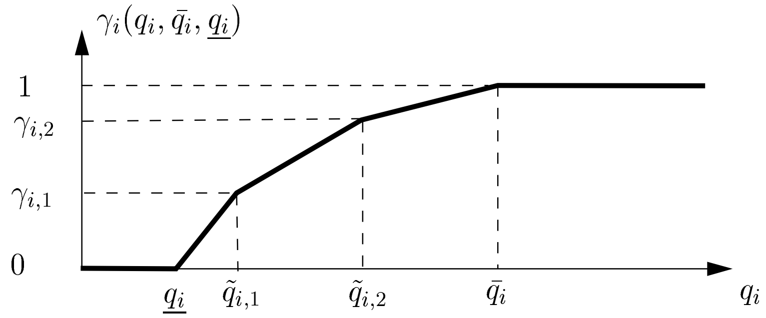
$$\gamma_{q_i}(\mathbf{x}) = \gamma_{i,j-1} + (\gamma_{ij} - \gamma_{i,j-1}) * (q_i - \tilde{q}_{i,j-1})/(\tilde{q}_{i,j} - \tilde{q}_{i,j-1}) \tag{2.2.8}$$
$$\text{dla} \quad \tilde{q}_{i,j-1} \leq q_i \leq \tilde{q}_{ij}, \quad j = 1, \dots, N_i$$

gdzie

$$\gamma_{i,0} = 0 < \gamma_{i,1} \ldots < \gamma_{i,j-1} < \ldots \gamma_{i,N_i} = 1$$

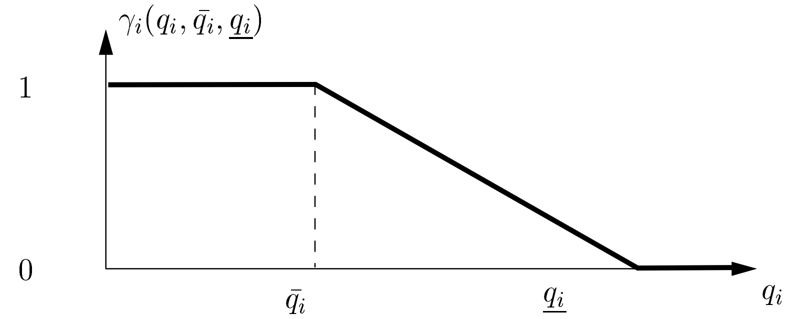
$$\tilde{q}_{i,0} = \underline{q}_i < \tilde{q}_{i,1} \ldots < \tilde{q}_{i,j-1} < \tilde{q}_{i,j} < \ldots \tilde{q}_{i,N_i} = \bar{q}_i$$

dla $q_i(\mathbf{x}) < \underline{q}_i \gamma_{q_i}(\mathbf{x}) = 0$ i dla $q_i(\mathbf{x}) < \bar{q}_i \gamma_{q_i}(\mathbf{x}) = 1$



Rys. 2.7: Odcinkami liniowa funkcja realizacji celu prezentowana użytkownikowi dla kryterium maksymalizowanego

Dla kryteriów minimalizowanych zakładamy następujące klasy $\mathcal{M}_{GMIN}$ funkcji realizacji celu prezentowane użytkownikowi:



Rys. 2.8: Liniowa funkcja realizacji celu prezentowana użytkownikowi dla kryterium minimalizowanego

- liniowa (w przedziale rezerwacji-aspiracji)

$$\gamma_{q_i}(\mathbf{x}) = [\underline{q}_i - q_i]/[\underline{q}_i - \bar{q}_i] \quad \text{dla} \quad \underline{q}_i \leq q_i \leq \bar{q}_i \tag{2.2.9}$$

  dla $q_i(\mathbf{x}) < \bar{q}_i$ $\gamma_{q_i}(\mathbf{x}) = 1$ i dla $q_i(\mathbf{x}) < \underline{q}_i$ $\gamma_{q_i}(\mathbf{x}) = 0$

- odcinkami liniowa

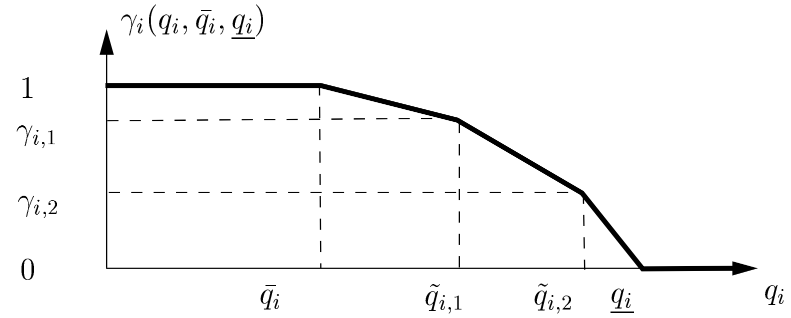
$$\gamma_{q_i}(\mathbf{x}) = \gamma_{i,j-1} + (\gamma_{ij} - \gamma_{i,j-1}) * (q_i - \tilde{q}_{i,j-1})/(\tilde{q}_{i,j} - \tilde{q}_{i,j-1}) \tag{2.2.10}$$
$$\text{dla} \quad \tilde{q}_{i,j-1} \leq q_i \leq \tilde{q}_{ij}, \quad j = 1, \ldots, N_i$$

  gdzie

$$\gamma_{i,0} = 0 < \gamma_{i,1} \ldots < \gamma_{i,j-1} < \ldots \gamma_{i,N_i} = 1$$

$$\tilde{q}_{i,0} = \bar{q}_i < \tilde{q}_{i,1} \ldots < \tilde{q}_{i,j-1} < \tilde{q}_{i,j} < \ldots \tilde{q}_{i,N_i} = \underline{q}_i$$

  dla $q_i(\mathbf{x}) < \bar{q}_i$ $\gamma_{q_i}(\mathbf{x}) = 1$ i dla $q_i(\mathbf{x}) < \underline{q}_i$ $\gamma_{q_i}(\mathbf{x}) = 0$



Rys. 2.9: Odcinkami liniowa funkcja realizacji celu prezentowana użytkownikowi dla kryterium minimalizowanego

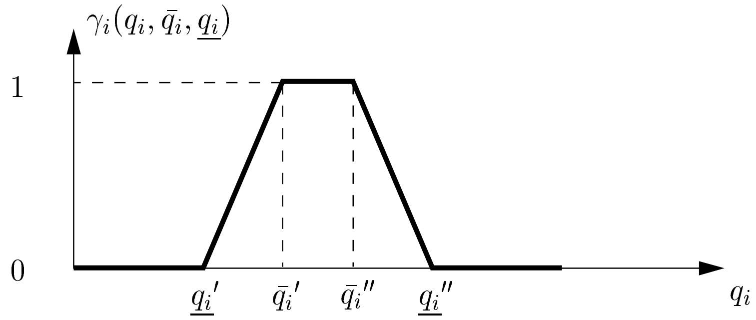
Dla kryteriów stabilizowanych zakładamy następujące klasy $\mathcal{M}_{GS}$funkcji realizacji celu prezentowane użytkownikowi:

- liniowa (w przedziałach pomiędzy dolnymi i górnymi punktami rezerwacji i aspiracji):

$$\gamma_{q_i}(\mathbf{x}) = [q_i - \underline{q}_i]/[\bar{q}_i - \underline{q}_i] \quad \text{dla} \quad \underline{q}_{i'} \leq q_i \leq \bar{q}_i' \tag{2.2.11}$$

$$\gamma_{q_i}(\mathbf{x}) = [\underline{q}_i - q_i]/[\underline{q}_i - \bar{q}_i] \quad \text{dla} \quad \bar{q}_i'' \leq q_i \leq \underline{q}_i'' \tag{2.2.12}$$

dla $q_i(\mathbf{x}) < \underline{q}_i'$ i $q_i(\mathbf{x}) > \underline{q}_i''$ $\gamma_{q_i}(\mathbf{x}) = 0$ oraz dla $q_i(\mathbf{x}) > \bar{q}_i'$ i $q_i(\mathbf{x}) < \bar{q}_i''$ $\gamma_{q_i}(\mathbf{x}) = 1$



Rys. 2.10: Liniowa funkcja realizacji celu prezentowana użytkownikowi dla kryterium stabilizowanego

- odcinkami liniowa

W przedziale $\underline{q}_{i'} \leq q_i \leq \bar{q}_i'$ funkcja $\gamma_{q_i}(\mathbf{x})$ jest zdefiniowana następująco:

$$\gamma_{q_i}(\mathbf{x}) = \gamma_{i,j-1} + (\gamma_{ij} - \gamma_{i,j-1}) * (q_i - \tilde{q}_{i,j-1})/(\tilde{q}_{i,j} - \tilde{q}_{i,j-1}) \tag{2.2.13}$$
$$\text{dla} \quad \tilde{q}_{i,j-1} \leq q_i \leq \tilde{q}_{ij}, \quad j = 1, \ldots, N_i$$

gdzie

$$\gamma_{i,0} = 0 < \gamma_{i,1} \ldots < \gamma_{i,j-1} < \ldots \gamma_{i,N_i} = 1$$

$$\tilde{q}_{i,0} = \underline{q}_i' < \tilde{q}_{i,1} \ldots < \tilde{q}_{i,j-1} < \tilde{q}_{i,j} < \ldots \tilde{q}_{i,N_i} = \bar{q}_i'$$

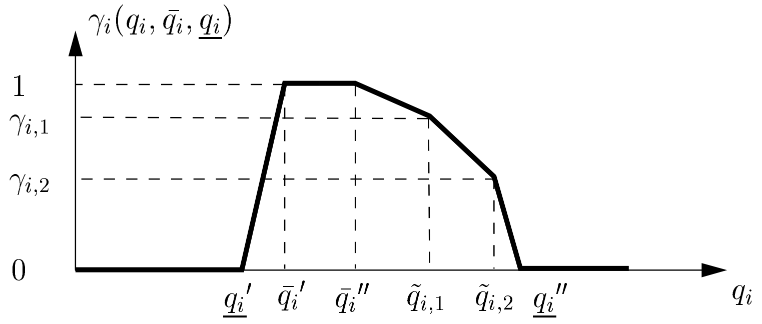
Również w przedziale $\bar{q}_i'' \leq q_i \leq \underline{q}_i''$ funkcja $\gamma_{q_i}(\mathbf{x})$ jest zdefiniowana jako funkcja odcinkami liniowa:

$$\gamma_{q_i}(\mathbf{x}) = \gamma_{i,j-1} + (\gamma_{ij} - \gamma_{i,j-1}) * (q_i - \tilde{q}_{i,j-1})/(\tilde{q}_{i,j} - \tilde{q}_{i,j-1}) \tag{2.2.14}$$
$$\text{dla} \quad \tilde{q}_{i,j-1} \leq q_i \leq \tilde{q}_{ij}, \quad j = 1, \ldots, N_i$$

gdzie

$$\gamma_{i,0} = 0 < \gamma_{i,1} \ldots < \gamma_{i,j-1} < \ldots \gamma_{i,N_i} = 1$$

$$\tilde{q}_{i,0} = \bar{q}_i'' < \tilde{q}_{i,1} \ldots < \tilde{q}_{i,j-1} < \tilde{q}_{i,j} < \ldots \tilde{q}_{i,N_i} = \underline{q}_i''$$



Rys. 2.11: Odcinkami liniowa funkcja realizacji celu prezentowana użytkownikowi dla kryterium stabilizowanego (przypadek asymetryczny)

W przedziale $q_i(\mathbf{x}) < \underline{q}_i'$ i $q_i(\mathbf{x}) > \underline{q}_i''$ funkcja ma stałą wartość równą 0, $\gamma_{q_i}(\mathbf{x}) = 0$ natomiast w przedziale $q_i(\mathbf{x}) > \bar{q}_i'$ i $q_i(\mathbf{x}) < \bar{q}_i''$ funkcja ma stałą wartość równą 1, $\gamma_{q_i}(\mathbf{x}) = 1$.

Zarówno dla funkcji liniowej jak i odcinkami liniowej można założyć dodatkowo postać symetryczną i asymetryczną.

Trzeba jeszcze wyjaśnić, dlaczego nie wykorzystać powyższych funkcji bezpośrednio w funkcji skalaryzującej. Otóż funkcja realizacji celu może być interpretowana jako funkcja, która specyfikuje preferencje użytkownika, ale również jest funkcją porządkującą alternatywy w przestrzeni decyzji lub przestrzeni kryteriów. Gdyby korzystać tylko z funkcji typu γ_i – odpowiadających funkcjom przynależności zbiorów rozmytych – to wszędzie tam, gdzie mają one wartość stałą, równą 0 lub 1, funkcje te przestają być monotoniczne i przestają porządkować alternatywy decyzyjne podczas optymalizacji. Inaczej mówiąc, odpowiednie agregacje funkcji przynależności nie są funkcjami w pełni zgodnymi z porządkiem.

Zgodne z porządkiem funkcje cząstkowe funkcji realizacji celu η_i można uzyskać z funkcji γ_i dla kryteriów maksymalizowanych w następujący sposób[2]:

$$\eta_i = \begin{cases} \gamma(q_i - \bar{q}_i)/(\bar{q}_i - q_{i,min}) - 1 & \text{jeśli } q_{i,min} \le q_i \le \bar{q}_i \\ \gamma_{q_i} & \text{jeśli } \bar{q}_i < \bar{q}_i < \bar{\bar{q}}_i \\ \beta(q_i - \bar{\bar{q}}_i)/(q_{i,max} - \bar{\bar{q}}_i) + 1 & \text{jeśli } \bar{\bar{q}}_i \le q_i \le q_{i,max} \end{cases}$$

W przypadku korzystania z innych klas funkcji realizacji celu, funkcje te należy uzależnić od parametrów, które mogą być wprowadzane w sposób interaktywny (w szczególności od punktu aspiracji i rezerwacji), jak również zapewniają odpowiednie właściwości numeryczne metody.

Funkcja skalaryzująca $\mathcal{S}(\mathbf{q}, \underline{\eta})$ powinna spełniać dwa warunki (dla przypadku kryteriów minimalizowanych i maksymalizowanych zostały sformułowane w pracy (Wierzbicki, 1986)):

- **Warunek wystarczający**
  Dla każdego wektora funkcji $\underline{\eta}$, którego składowymi są funkcje realizacji

[2] W podobny sposób można przedstawić ten wzór dla kryteriów minimalizowanych

celu należące do klasy $\mathcal{M}$ i co najmniej jedno kryterium jest minimalizowane lub maksymalizowane [3] powinien spełniony być warunek:

$$\operatorname*{Argmax}_{\mathbf{q}\in Q} \mathcal{S}(\mathbf{q}, \underline{\eta}) \subset \mathcal{E}_{C_\epsilon} \tag{2.2.15}$$

gdzie $\mathcal{E}_{C_\epsilon}$ jest zbiorem rozwiązań właściwie sprawnych.

- **Warunek konieczny** (własność zupełności)
  Dla każdego $\hat{q} \in \mathcal{E}_{C_\epsilon}$, istnieje taki wektor funkcji realizacji celu $\hat{\underline{\eta}}$, którego składowe należą do klasy $\mathcal{M}$, że

$$\hat{\mathbf{q}} \in \operatorname*{Argmax}_{\mathbf{q}\in Q} \mathcal{S}(\mathbf{q}, \hat{\eta}) \tag{2.2.16}$$

Kolejnym etapem jest opracowanie narzędzia komputerowego , które będzie realizowało przedstawione założenia. Moduł interakcji graficznej został szczegółowo przedstawiony w Dodatku **??**. Tutaj zostaną przedstawione założenia interakcji z użytkownikiem z wykorzystaniem funkcji realizacji celu. Oczywiście przedstawiony scenariusz może być dalej rozwijany i uzupełniany. Zakładamy, że cząstkowe funkcje realizacji celu są wyświetlane w zakresie pomiędzy utopią a nadirem. Oprócz funkcji realizacji celu wyświetlane jest aktualne rozwiązanie sprawne oraz w następnych iteracjach poprzednie rozwiązanie sprawne. Punkty reprezentujące poprzednie i aktualne rozwiązanie sprawne dla poszczególnych współrzędnych są łączone linią. Dodatkowo może być wyświetlane więcej punktów reprezentujących rozwiązania sprawne nie tylko z poprzedzającej iteracji, ale również z wcześniejszych iteracji. Związane jest to z dostarczeniem informacji dotyczącej historii procesu interakcji (patrz. Dodatek **??**). Ponadto interfejs powinien mieć możliwość interaktywnej zmiany funkcji realizacji celu. Możemy wyróżnić następujące możliwości zmiany cząstkowych, liniowych funkcji realizacji celu:

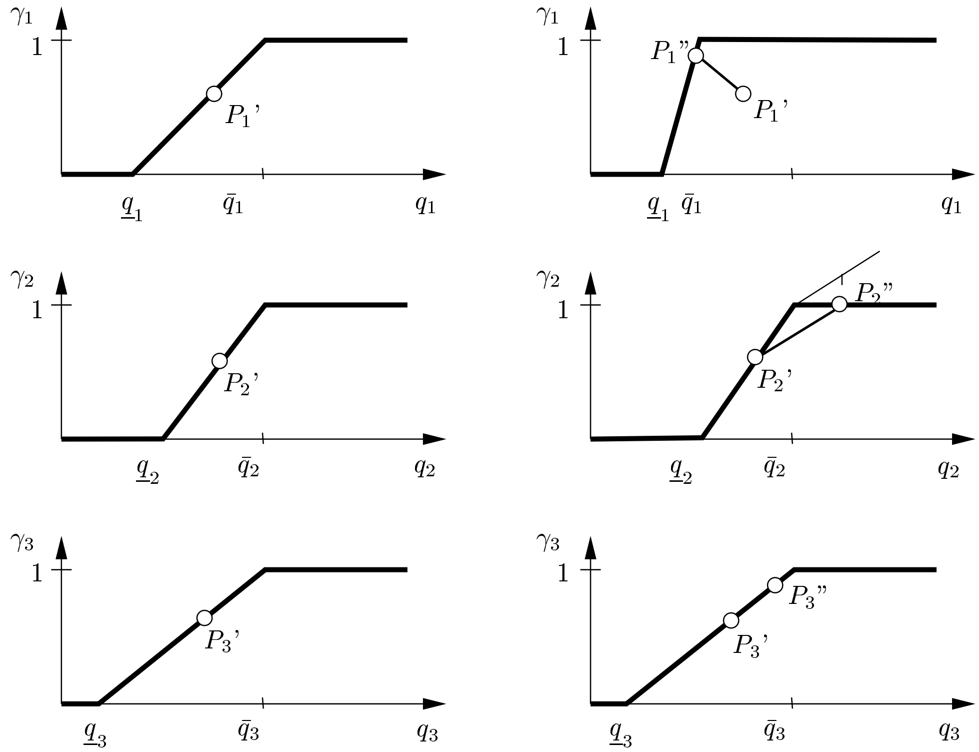
- Przesunięcie poziomu aspiracji $\bar{q}_i$ w zakresie między wartością utopii a poziomem rezerwacji.
- Przesunięcie poziomu rezerwacji $\underline{q}_i$ w zakresie między poziomem aspiracji a aproksymowaną wartością nadiru.
- Przesunięcie zarówno poziomu aspiracji $\bar{q}_i$ jak i poziomu rezerwacji $\underline{q}_i$ w podanych powyżej zakresach.

Dodatkowo, dla funkcji odcinkami liniowych można wyróżnić następujące operacje:

- Dodanie nowego punktu między punktem aspiracji i rezerwacji.
- Usunięcie punktu znajdującego się między punktem aspiracji a rezerwacji.

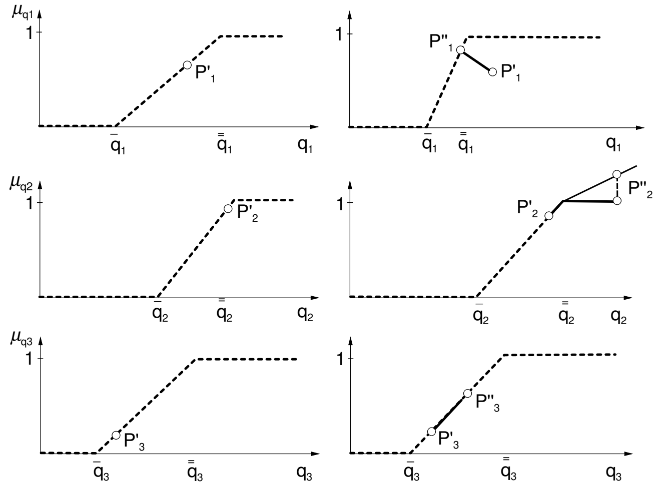
Przykład jednego kroku interakcji z użytkownikiem został przedstawiony na Rys. 2.13. Rysunek ten przedstawia trzy funkcje realizacji celu określone dla trzech kryteriów. Lewa strona rysunku przedstawia funkcje przed dokonaniem zmiany funkcji realizacji celu. Punkty P_1', P_2', P_3' oznaczają rozwiązania sprawne. Następnie użytkownik dokonuje zmiany funkcji realizacji celu dla pierwszego

[3] W przypadku, gdy wszystkie funkcje są stabilizowane, otrzymane rozwiązanie może nie być rozwiązaniem sprawnym



Rys. 2.12: Przykład jednego kroku interakcji

kryterium przesuwając $\bar{q}_1$, po czym następuje obliczanie nowego rozwiązania sprawnego. Prawa strona Rys. 2.13 przedstawia stan interfejsu po znalezieniu rozwiązania sprawnego. Punkty P_1'', P_2'', P_3'' przedstawiają nowe rozwiązanie sprawne. Dodatkowe linie łączą poprzednie rozwiązanie z nowym. Należy zwrócić uwagę na fakt, że na rysunku przedstawiane są tylko uproszczone funkcje realizacji celu, natomiast w obliczeniach wykorzystywana jest funkcja bez uproszczeń. Pojawia się zatem problem, jak reprezentować rozwiązania, dla których wartości funkcji realizacji celu spełniają warunki: $\eta_i < 0$ lub $\eta_i > 1$. W proponowanym interfejsie przyjęto, że rozwiązanie jest rzutowane na linie $\gamma_i = 0$ lub $\gamma_i = 1$. Można również zaproponować dla bardziej zaawansowanych użytkowników opcje wyświetlanie cząstkowych funkcji realizacji celu bez uproszczeń. W następnym punkcie zostanie przedstawiony prosty przykład ilustrujący podstawową opcje wykorzystania interfejsu z wykorzystaniem jego pierwszego prototypu współpracującego z systemem IAC-DIDAS-N. W dalszej części rozprawy zostaną przedstawione przykłady zastosowań omówionej tu metody interakcji.



Rys. 2.13: Przykład jednego kroku interakcji

2.3. Przykłady modelowania sytuacji decyzyjnej

2.4. Prosty przykład modelowania sytuacji decyzyjnej

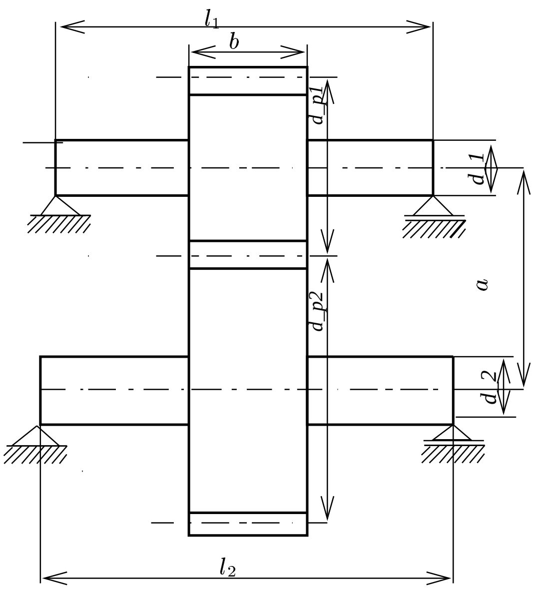
Pan Kowalski zamierza pracować w najbliższą sobotę. Jednocześnie chce trochę czasu poświęcić na wypoczynek. Sumarycznie na wypoczynek i pracę może poświęcić 14 godzin. Jego wynagrodzenie wynosi \$10 za godzinę. Chciałby spędzić w pracy co najmniej 5 godzin i poświęcić nie więcej niż 8 godzin na wypoczynek. Wprowadzone zostały umowne jednostki określające jego poziom zadowolenia z pracy i wypoczynku. Każdej godzinie spędzonej w pracy jest przypisana jedna jednostka zadowolenia natomiast godzinie spędzonej na wypoczynku jest przypisanych pięć jednostek zadowolenia. Pan Kowalski chciałby zarobić w najbliszą sobotę co najmniej \$145 i jednocześnie chciałby osiągnąć poziom zadowolenia co najmniej 50 jednostek.

2.4.1. Przykład numeryczny pokazujący wykorzystanie kryteriów stabilizowanych

Przykład ten pokazuje wykorzystanie kryteriów stabilizowanych w projektowaniu inżynierskim, w związku z zagadnieniem projektowania przekładni zębatej (Wierzbicki i Granat, 1996). Model matematyczny przekładni przedstawionej na rysunku 2.14 został opracowany przez Osyczkę (Osyczka, 1994).

Problem analizy doboru parametrów przekładni może być opisany matematycznie za pomocą zadania analizy wielokryterialnej z trzema kryteriami $f_i(\mathbf{x})$ i 14-oma ograniczeniami $g_j(\mathbf{x})$ określającymi zbiór decyzji dopuszczalnych $X_0 = \{\mathbf{x} \in I\!R_n : \mathbf{g}(\mathbf{x}) \leq 0\}$.

Orginalnie model uwzględniał tablice parametrów, które są wykorzystywane przy projektowaniu przekładni. Zamiast współczynników z tych tablic wykorzy-



Rys. 2.14: Przekładnia zębata walcowa o zębach prostych

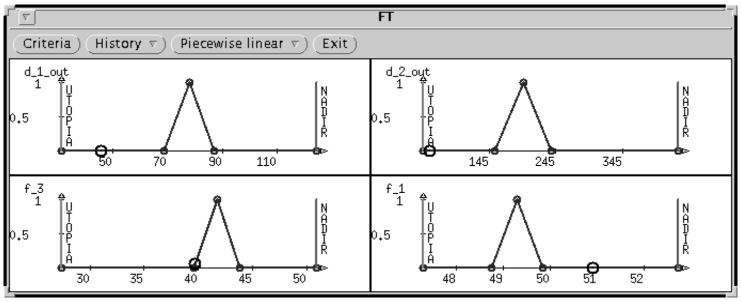
stano przy rozwiązywaniu zadań optymalizacji funkcje aproksymujące. Wykorzystanie tych funkcji pozwala na sformułowanie modelu nieliniowego zamiast modelu modelu dyskretno-nieliniowego. Takie uproszczenie jest dopuszczalne przy wstępnej analizie rozwiązań; natomiast w systemie, który byłby wykorzystany przy projektowaniu, należało by uwzględnić fakt, że niektóre zmienne decyzyjne mogą przyjmować tylko wartości dyskretne, co wynika z możliwości realizacyjnych.

1. Zmiennymi decyzyjnymi są: szerokość wieńca koła zębatego b (która jest jednocześnie kryterium), średnice d_1 oraz d_2 wałków małego i dużego koła zębatego, ilość zębów małego koła zębatego $\tilde{z}$ oraz moduł nominalny $\tilde{m}$ (zarówno ilość zębów jak i wartość modułu są zmiennymi dyskretnymi).

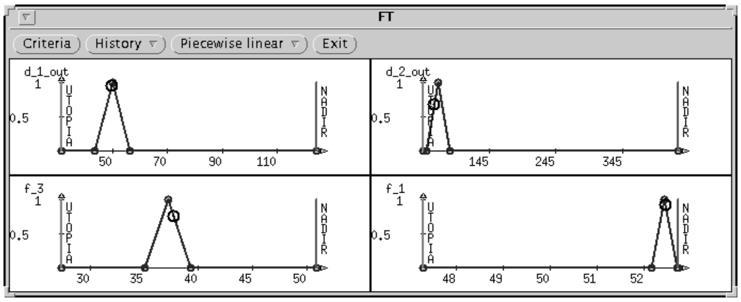
2. Kryteriami są: objętość przekładni $q_1 = f_1$ $[mm^3]$, odległość między osiami $q_2 = f_2 = a$ [mm] oraz szerokość wieńca koła zębatego $q_3 = f_3 = b$ [mm]

$$\begin{aligned} q_1 &= ((\frac{\pi}{4}\tilde{m}^2(\tilde{z}_1^2 + \tilde{z}_2^2)b) + \frac{\pi}{2}d_1^3 + \frac{\pi}{2}d_2^3) * 10^{-5} \\ q_2 &= \frac{(\tilde{z}_1 + \tilde{z}_2)}{2}\tilde{m} \\ q_3 &= b \end{aligned} \tag{2.4.17}$$

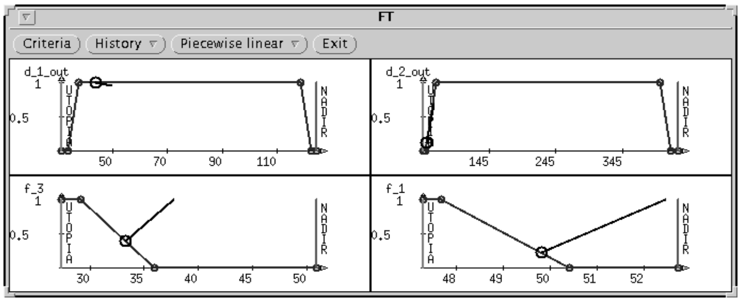
Przedstawiony model zalicza się do klasy modeli niewypukłych i korzystanie z niego wymaga doświadczenia w projektowaniu elementów mechanicznych. W symulacji odwrotnej chcemy uzyskać zadaną objętość koła zębatego f_1 oraz szerokość wieńca koła zębatego f_3 (f_1 i f_3 są kryteriami, ale jednocześnie chcemy, aby po optymalizacji uzyskać określonych wartości średnic d_1 i d_2 wałków małego i dużego koła zębatego (d_1 i d_2 należą do zmiennych decyzyjnych). Użytkownik wyraża swoje preferencje co do wartości f_1, f_3, d_1 i d_2 za pomocą funkcji



Rys. 2.15: Okno interakcji w systemie DIDAS-N++ dla przypadku symulacji odwrotnej z arbitralnie wybranymi funkcjami realizacji celu



Rys. 2.16: Okno interakcji w systemie DIDAS-N++ dla przypadku symulacji odwrotnej z funkcjami realizacji celu wybranymi na podstawie doświadczeń konstrukcyjnych



Rys. 2.17: Okno interakcji w systemie DIDAS-N++ dla przypadku symulacji odwrotnej pokazujące poprawę dwóch kryteriów

realizacji celu, które charakteryzują kryteria stabilizowane. Rysunek 2.15 pokazuje pierwszy rezultat symulacji odwrotnej modelu, gdy funkcje realizacji celu wyrażone są arbitralnie. Rezultaty optymalizacji (zaznaczone na wykresie kółkami) pokazują, że tak postawione cele nie mogą zostać zrealizowane. Następnie w specyfikacji preferencji wykorzystuje się informację od doświadczonego projektanta elementów mechanicznych. Widać, że w tym przypadku (patrz. Rys. 2.16) wartości funkcji realizacji celu są bliskie 1, czyli zostało znalezione rozwiązanie prawie spełniające zadane wymagania. W następnym kroku spróbujemy odpowiedzieć na pytanie, czy uzyskamy zmniejszenie objętości f_1 i wymiaru f_3, gdy zmienimy funkcje realizacji celu ze stabilizowanej na funkcję, która charakteryzuje kryterium minimalizowane, dokonując relaksacji wymagań na d_1 i d_2. Z Rys. 2.17 widać, że możemy uzyskać zmniejszenie f_1 i f_3 przy niewielkich zmianach d_1 i d_2.

Rozdział 3

Metody rozwiązywania zadań analizy wielokryterialnej

W rozdziale tym zostaną przedstawione główne podejścia do rozwiązywania zadań optymalizacji wielokryterialnej. Pozwoli to na umiejscowienie metod interakcji z użytkownikiem, przedstawionych w następnych rozdziałach, w aktualnym dorobku w dziedzinie analizy wielokryterialnej. Dokładny opis jak i próby klasyfikacji tych metod ze względu na różne kryteria można znaleźć w pracach (Sowiski, 1984; Sowiski, 1984; Vanderpooten, 1989; Vanderpooten i Vincke, 1989; Shin i Ravindran, 1991; Steuer, 1986; Sakawa, 1993; Seo i Sakawa, 1988).

W poprzednim podrozdziale został sformułowany prosty model preferencji oparty o relacje dominacji. Model ten pozwala na wyodrębnienie zbioru rozwiązań sprawnych o różnych szczególnych własnościach ze zbioru rozwiązań dopuszczalnych. Pierwsza grupa metod rozwiązywania zadań analizy wielokryterialnej pozwala na znalezienie zbioru rozwiązań sprawnych lub jego aproksymacje. Następnie znaleziony zbiór rozwiązań jest prezentowany użytkownikowi, którego zadaniem jest wybór najlepszego wariantu. Metody te można zatem zaliczyć do grupy metod, w których preferencje użytkownika wyrażane są *a posteriori*. Można wyróżnić tutaj kilka grup metod.

1. Dla wielokryterialnych zadań liniowych - metody generowania wierzchołków sprawnych lub wszystkich maksymalnych powierzchni sprawnych, korzystając ze szczególnych własności zadań liniowych (J. Philip (1972), J.P. Evans i R.E. Steuer (1973), M. Zeleny (1974), T. Gal (1977), H. Isermann (1977); J.G. Ecker, I.A. Kouada (1978)). Przegląd tych prac można znaleźć w (Steuer, 1986),(Galas, Nykowski i »kiewski, 1987). Wadą tego typu podejścia jest długi czas obliczeń, szybki wzrost liczby wierzchołków wraz ze zwiększaniem rozmiarów zadania, a co za tym idzie nadmiar generowanej informacji, która jest wykorzystywana do podejmowana decyzji.

2. Dla wielokryterialnych zadań liniowych - metody aproksymacji zbioru rozwiązań sprawnych oparte o algorytmy niesympleksowe, zob. np. S.S. Abhyankar, T.L Morin i T. Trafals (1990).

3. Metody aproksymacji zbioru rozwiązań sprawnych zadań nieliniowych. H.J. Payne i in. (1975) opracowali metodę aproksymacji zbioru rozwiązań sprawnych dla zadań bikryterialnych opartą na własnościach funkcji wrażliwości oraz interpolacji Hermite'a. Następnie algorytm ten został rozszerzony przez E. Polaka (1975). Dla zadań bikryterialnych została również opracowana metoda **NISE** (**N**oninferior **S**et **E**stimation) , zob. J.L. Cohon i in. (1979). W oparciu o metodę NISE i dekompozycję wieloparametryczną została opracowana metoda **BAWD** (**B**iobjective **A**pproximation with **W**eight **D**ecomposition) przez S.Solanki i J.L. Cohona (1989). B. Fruhwirth i in. (1989), wykorzystali metodę aproksymacji krzywej wypukłej (również dla zadań dwukryterialnych).

   Zostały opracowane również metody, które pozwalają dokonać aproksymacji zbioru rozwiązań sprawnych dla liczby kryteriów większej od dwóch. Metoda XNISE (R.S. Solanki i in. (1993)) bazuje na metodzie NISE, ale umożliwia aproksymację zbioru rozwiązań sprawnych dla zadań liniowych. Natomiast metoda GRS (Generalized Reachable Set) opracowana przez A.V. Lotova (1987), oraz algorytm zaproponowany przez Kaliszewskiego (1991) pozwalają na aproksymację zbioru rozwiązań sprawnych dla zadań nieliniowych.

Zbiór rozwiązań sprawnych jest zazwyczaj zbyt liczny, i tylko w niektórych przypadkach powyższe metody pozwalają uzyskać rozwiązanie zadawalające. Ponadto metody te wymagają zazwyczaj dużych nakładów obliczeniowych. Dalsze zawężanie zbioru rozwiązań jest możliwe po uzyskaniu dodatkowej informacji preferencjnej od użytkownika.

W metodach rozwiązywania zadań wielokryterialnych wykorzystujących dodatkową informację preferencyjną można wyróżnić dwie zasadnicze grupy:

1. Metody, w których zakłada się istnienie stałych, istniejących *a priori* preferencji użytkownika zgodnych z określonym schematem lub paradygmatem podejmowania decyzji. Metody te również nazywane **metodami deskryptywnymi** (Roy, 1990; Vanderpooten, 1989).

2. Metody, które wspomagają proces uczenia się preferencji użytkownika. Są one nazywane również **metodami konstruktywnymi** (Roy, 1990; Vanderpooten, 1989).

W metodach deskryptywnych można wyróżnić:

- Metody, w których zakłada się, że użytkownik może wyrazić swoje preferencje *a priori.*

  - Atrakcyjnym z punktu widzenia obliczeń jest sformułowanie preferencji w postaci *funkcji wartości.* Funkcja ta pozwala na dokonanie agregacji kryteriów w jedno kryterium syntetyczne. Teoria funkcji wartości zakłada system relacji preferencji ($\sim$, $\succ$) lub ($\sim$, $\succ$, $\succeq$), czyli nie dopuszcza sytuacji nieporównywalności decyzji oraz wprowadza porządek zupełny. Preferencje są modelowane najczęściej za pomocą liniowej funkcji wartości, w której *a priori* określa się współczynniki wag.

- W *metodzie ograniczeń progowych* (ϵ-constraint method) dokonuje się wyboru jednego z kryteriów, które będzie podlegało minimalizacji bądź maksymalizacji, a dla pozostałych określa się dodatkowe ograniczenia. Model preferencji można wyrazić za pomocą addytywnej funkcji wartości. Dla kryteriów, dla których określono dodatkowe ograniczenia, funkcja wartości jest stała w przedziale dopuszczalnym oraz jest nieskończenie mała po przekroczeniu wartości zadanego ograniczenia.
- W *programowaniu leksykograficznym* określa się hierarchię kryteriów. Preferencje są modelowane za pomocą relacji porządku leksykograficznego. Przy porównaniu dwóch różnych decyzji lepsza jest ta, która zapewnia wyższy stopień realizacji celu najważniejszego.
- W problemach decyzyjnych występuje często sytuacja nieporównywalności dwóch decyzji lub słabej preferencji jednej z decyzji względem drugiej. Przypadki te są uwzględniane w modelu preferencji opartym o *relację przewyższania.* Aby ta relacja mogła być wykorzystywana w algorytmach rozwiązywania zadań wielokryterialnych zostały opracowane tzw. testy przewyższania (Roy, 1990). Informacja preferencyjna, którą użytkownik powinien dostarczyć ma wtedy postać progów nierozróżnialności i preferencji oraz progu veta.
- W *programowaniu celowym* użytkownik wyraża swoje preferencje w postaci poziomów aspiracji, czyli wartości kryteriów, które chciałby osiągnąć. Następnie formułowane jest zadanie optymalizacji, w którym jako kryterium przyjmuje się sumę ważoną bezwzględnych odchyleń od zadanych poziomów aspiracji.
- W wymienionych powyżej metodach nie poruszane były zagadnienia związane z modelowaniem niepewności. W klasycznym podejściu teorii decyzji niepewność uwzględnia się poprzez model probabilistyczny, czyli maksymalizację *funkcji użyteczności* - wartości oczekiwanej odpowiedniej funkcji wartości. Inną możliwością uwzględnienia niepewności w modelowaniu preferencji jest wykorzystanie zbiorów rozmytych. Użytkownik dla każdego z kryteriów określa wówczas *funkcje przynależności.*

• *Metody interaktywne proste*, w których zakłada się, że użytkownik dostarcza informacje preferencyjną w trakcie procesu interakcji, ale informacja ta nie jest wykorzystywana do formułowania explicite modelu preferencji. Zazwyczaj w metodach tych zawęża się przeglądany obszar zbioru rozwiązań sprawnych.

Jedną z pierwszych metod interaktywnych była *metoda STEM* (R. Benayoun i in., 1971). W pierwszym kroku tej metody prezentuje się użytkownikowi tablicę wypłat, która jest konstruowana na podstawie rezultatów niezależnej optymalizacji każdego z kryteriów. Zadaniem użytkownika jest wskazanie tych kryteriów, których wartości są satysfakcjonujące oraz tych, które mogą być pogorszone w celu poprawienia wartości pozostałych kryteriów, a także zakresów dopuszczalnego pogorszenia tych kryteriów. Na podstawie tej informacji formułuje się nowe ograniczenia oraz rozwiązuje się zadanie minimalizacji maksymalnej odległości rozwiązania od punktu utopijnego. Rozwiązanie to jest prezentowane wraz z punktem utopijnym użytkownikowi. Jeżeli wszystkie wartości kryteriów są zadawalające to proces interakcji zostaje zakończony, w przeciwnym wypadku określa się zakres dopuszczalnego pogorszenia jednego z kryteriów, którego wartość jest satysfakcjonująca, dodaje się dodatkowe ograniczenie i ponownie rozwiązuje się zadanie minimalizacji maksymalnej odległości od punktu utopijnego.

Interaktywna metoda sumy ważonej (Steuer (1980)) polega na stopniowej redukcji zbioru przynależności wektora wag funkcji skalaryzującej. Dla danego zbioru przynależności wektora wag generuje się losowo określoną liczbę wektorów wag. Następnie z tych wektorów procedura filtracji pozostawia podzbiór wektorów, który najlepiej charakteryzuje aktualny zbiór przynależności. Następnie dla każdego wektora wag z tego podzbioru rozwiązuje się zadania z funkcją celu równą sumie ważonej kryteriów. Po zastosowaniu filtracji otrzymanych rozwiązań sprawnych, prezentuje się użytkownikowi pozostałe rozwiązania sprawne, z których wybiera rozwiązanie najbardziej preferowane. Na podstawie tej informacji dokonuje się redukcji zbioru przynależności wektora wag. Proces interakcji zostaje zakończony po wykonaniu zadanej liczby iteracji.

Metoda interaktywna Czebyszewa (Steuer i Choo (1983)) jest zbliżona do interaktywnej metody sumy ważonej. Dokonuje się tu również stopniowej redukcji zbioru wektora wag, z tym że funkcja skalaryzująca ma postać normy Czebyszewa, a początkowy wektor wag wyznaczany jest za pomocą punktu odniesienia (w istocie w sposób równoważny do metody punktu odniesienia).

- *Metody interaktywne z modelem preferencji*, w których buduje się explicite model preferencji w trakcie procesu interakcji z użytkownikiem (którego preferencje są traktowane jako niezmienne w trakcie procesu interakcji). Przyjmuje się tutaj model preferencji w postaci funkcji wartości. Można tutaj ponadto wyróżnić: metody z bezpośrednią konstrukcją funkcji wartości oraz z pośrednim jej wykorzystaniem.

  W *metodzie Geoffriona, Dyera, Feinberga (1972)* zakłada się że preferencje użytkownika są reprezentowane przez funkcję użyteczności, o której zakłada się że jest różniczkowalna, wklęsła i rosnąca ze względu na każdy argument. W metodzie tej korzysta się z algorytmu Franka-Wolfe'a. W pierwszym etapie należy określić kierunek najszybszego wzrostu funkcji. Kierunek ten wyznacza się rozwiązując pomocnicze zadanie optymalizacji, którego funkcja celu jest iloczynem skalarnym poszukiwanego wektora i przybliżenia gradientu funkcji użyteczności. Przybliżenie gradientu funkcji użyteczności jest określane na podstawie subiektywnych ocen współczynników "trade-off" między kryteriami. W drugim etapie rozwiązuje się zadanie maksymalizacji funkcji użyteczności w wyznaczonym w pierwszym etapie kierunku. Ponieważ nieznana jest analityczna postać funkcji użyteczności, użytkownik określa przybliżone rozwiązanie na podstawie obserwacji zmian wartości kryteriów wzdłuż analizowanego kierunku. Wartości te mogą być prezentowane numerycznie lub w formie graficznej. Proces jest powtarzany do uzyskania wartości zadowalających wartości kryteriów.

  W *SWT (The surrogate worth trade-off method)*(Chankong and Haimes

(1978)) generowany jest podzbiór rozwiązań sprawnych za pomocą metody ϵ-ograniczeń. Następnie są określane wartości współczynników "trade-off" (są one równe mnożnikom Kuhna-Tuckera) między wybranym kryterium a pozostałymi kryteriami. Użytkownik określa stopień preferencji pogorszenia jednego z kryteriów w celu polepszenia innego podając liczbę całkowitą z zakresu $-10, \ldots, +10$(czyli przypisuje tę liczbę współczynnikom wymiany). Na podstawie liczb określających stopień preferencji określana jest funkcja wartości, która służy do określenia nowego punktu sprawnego.

W *metodzie Ziontsa-Walleniusa (1976)* zakłada się liniową lub wklęsłą funkcja użyteczności. W przypadku liniowym w kolejnych iteracjach użytkownik porównuje sąsiednie wierzchołki sprawne (i tylko te, które spełniają dodatkowe ograniczenia na współczynniki wag funkcji użyteczności) z aktualnym rozwiązaniem. Dodatkowo mogą być analizowane "trade-off" przy przejściu z danego wierzchołka do wierzchołka sąsiedniego, na podstawie współczynników tablicy sympleksowej. Przy porównywaniu sąsiednich wierzchołków lub wartości "trade-off" użytkownik może odpowiedzieć: tak, nie lub nie wiem.

Najbardziej interesujące z punktu widzenia praktycznego są metody interaktywne (dialogowe) , w których informacja preferencyjna dostarczana jest w trakcie procesu interakcji oraz wspomagają proces uczenia preferencji. Metody te zaliczają się do metod konstruktywnych. Znaczną grupę stanowią tutaj metody oparte o specyfikację punktu odniesienia. Należą do nich:

- *Metoda punktu odniesienia* (Wierzbicki (1977,1980)). W metodzie tej użytkownik specyfikuje poziom aspiracji oraz poziom rezerwacji dla wszystkich kryteriów. Poziom aspiracji to poziom, który użytkownik chciałby osiągnąć, poziom rezerwacji reprezentuje żądania użytkownika co do najgorszej wartość kryteriów. Na podstawie tych wartości poszukuje się rozwiązania sprawnego najlepiej spełniającego aspiracje użytkownika. Następnie prezentuje się to rozwiązanie użytkownikowi, który zmienia poziomy odniesienia, jeżeli otrzymane rozwiązanie nie jest satysfakcjonujące. Metoda ta odpowiada omawianemu wcześniej trybowi podejmowania decyzji prawie satysfakcjonujących. Jednym z zasadniczych elementów tej metody jest wykorzystanie *funkcji osiągnięcia zgodnej z porządkiem* (order-consistent achieviement function, zob. A. Wierzbicki (1986)), które to podejście będzie też wykorzystywane w tej rozprawie pod nieco odmienną nazwą *funkcji realizacji celu.*

- *Metoda satysfakcjonujących współczynników wymiany* (Nakayama i Sawaragi (1983)) W metodzie tej użytkownik specyfikuje poziomy odniesienia. Następnie poszukiwane jest rozwiązanie sprawne najbliższe wyspecyfikowanym poziomom (minimalizacja maksymalnej odległości od punktu odniesienia). Na podstawie otrzymanych wartości użytkownik dokonuje podziału kryteriów na te, które chciałby poprawić, te które mogą być pogorszone, oraz te których poziomy są zadawalające. Dla kryteriów grupy pierwszej i drugiej muszą być ponadto podane nowe akceptowalne wartości tych kryteriów. Procedura kończy działanie, gdy wszystkie kryteria osiągnęły zadowalający poziom.

- *Interaktywna metoda wizualna* (Korhonen i Laakso (1986)) W metodzie tej użytkownik określa swoje preferencje przez podanie kierunku odniesienia.

Kierunek ten jest definiowany poprzez podanie punktu odniesienia oraz kierunku zmian tego punktu. Następnie tak zdefiniowana półprosta jest rzutowana na powierzchnię sprawną, z wykorzystaniem funkcji osiągnięcia zaproponowanej przez Wierzbickiego. Otrzymane rozwiązania sprawne są prezentowane użytkownikowi w formie graficznej lub numerycznej w celu wybrania rozwiązania najbardziej odpowiadającego użytkownikowi. Proces interakcji jest kontynuowany tak długo aż rozwiązanie sprawne wybrane przez użytkownika jest równe rozwiązaniu z poprzedniej iteracji.

- *Metoda zawężania stożka z wizualną interakcją* (Jaszkiewicz i Słowiński (1991)). W metodzie tej można wyróżnić dwa etapy. W etapie pierwszym generowany jest niewielki liczebnie zbiór punktów sprawnych, które powinny jak najlepiej charakteryzować cały zbiór rozwiązań sprawnych. Na podstawie tych punktów i dodatkowej informacji decydenta w postaci współczynników: niezgodności, preferencji, veta oraz współczynnika ważności każdego z kryteriów, konstruowana jest rozmyta relacja przewyższania. Relacja ta pozwala na skonstruowanie dwóch preporządków (otrzymane przez algorytmy wzrostu i spadku) i konstrukcję dwóch funkcji skalaryzujących zachowujących odpowiednio te preporządki. Etap drugi rozpoczyna się od skonstruowania stożka preferencji w przestrzeni kryteriów, na podstawie rezultatów etapu pierwszego, a następnie prezentuje się w sposób graficzny lub numeryczny rozwiązania sprawne określone przez ten stożek. Jeżeli użytkownik nie znajdzie wśród prezentowanych rozwiązań rozwiązania zadowalającego proces interakcji jest kontynuowany. Użytkownik przez dostarczenie dodatkowej informacji może zawęzić stożek preferencji lub zmienić kierunek analizy rozwiązań.

Do grupy takich metod należy też opisywana dalej w niniejszej rozprawie metoda interaktywnej specyfikacji graficznej preferencji użytkownika. Rozwinęła się również grupa metod interaktywnych wykorzystujących zbiory rozmyte, metody te jednak będą omówione bardziej szczegółowo w rozdziale **??**.

Bibliografia

Simon, H. (1957). *Models of Man*, J. Wiley & Sons, Chichester, New York.

Korhonen, P. (1986). *VIG, User's Guide.*

Belton, V., Vickers, S. (1988). VISA - VIM for MCDA, *Proceedings of the VIIIth International Conference on MCDM*, Manchester, England.

Lawandowski, A. (1982). Issues in model validation, *Angewandte Systemanalyse* **3**(1): 3–11.

Eick, S., Wills, G. (1995). High Interaction Graphics, *European Journal of Operational Research* **81**: 445–459.

Erlandson, F. (1981). The satisficing process: A new look, *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics.*

Roy, B. (1990). *Wielokryterialne wspomaganie decyzji*, WNT, Warszawa.

Andriole, S. (1989). *Handbook of Decision Support Systems*, TAB Professional and Reference Books, Blue Ridge Summit, PA.

Geoffrion, A. (1987). An Introduction to Structured Modeling, *Management Science* **33**(5): 547–588.

Climaco, J. (1987). The TRIMAP Package as Powerful Teaching Tool, *Multiple Criteria Decision Making and Risk Analysis Using Microcomputers*, Vol. 56 of *NATO ASI Series, Computer and System Sciences*, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York.

Climaco, J., Antunes, C. (1992). Man-machine interfacing in MCDA, *Proceedings of the Tenth International Conference on Multiple Criteria Decision Making*, Taipei, Taiwan.

Exp (1995). *Expert Choice - Decision Support Software, Tutorial*, version 9.0 edn.

Mareschal, B., Brans, J.-P. (1988). Geometrical Representations for MCDA, *European Journal of Operational Research* **34**: 69–77.

Whitaker, D., Brown, M. (1991). Linear programme modelling with database, *Computers Ops Res.*

Galas, Z., Nykowski, I., »kiewski, Z. (1987). *Programowanie wielokryterialne*, Pastwowe Wydawnictwo Ekonomiczne, Warszawa.

Liu, R. R.-S., Hou, Y.-W. C. (1992). A Hypertext System Implemented on X Window, *Proceedings of the Tenth International Conference on Multiple Criteria Decision Making*, Taipei, Taiwan.

Choi, Y., Kim, S. (1992). A Multiple Criteria Decision Support System MC-VISA, *Proceedings of the Tenth International Conference on Multiple Criteria Decision Making*, Taipei, Taiwan.

Sakawa, M. (1993). *Fuzzy Sets and Interactive Multiobjective Optimization*, Plenum Press, New York, London.

Vetschera, R. (1989). A Preference-Preserving Projection Technique for MCDM, *Diskussionsbeiträge Serie I - 256*, Fakultät für Wirtschaftswissenschaften und Statistik, Konstanz.

Sprague, R. (1983). A Framework for the Development of Decision Support Systems, *Information Systems for Planning and Decision Making*, Van Nostrand Reinhold Company, new York.

Ariav, G., Ginzberg, M. (1985). DSS Design: A Systematic View of Decision Support, *Communications of the ACM* **28**(10): 1045–1052.

Sawaragi, Y., Nakayama, H., Tanino, T. (1985). *Theory of Multiobjective Optimization*, Academic Press, New York.

Simkin, D., Hastie, R. (1987). An Information-Processing Analysis of Graph Perception, *Journal of the American Statistical Association* **82**(398): 454–465.

DeSanctis, G. (1984). Computer Graphics as Decision Aids: Directions for Research, *Decision Science* **15**: 463–487.

Amann, M., Kornai, G. (1987). Cost Functions for Controlling SO2 Emissions in Europe, *Working Paper WP-87-065*, International Institute for Applied Systems Analysis, Laxenburg, Austria.

Sowiski, R. (1984). Przegld metod wielokryterialnego programowania liniowego. Cz I, *Przegld statystyczny* **31**: 47–63.

Sowiski, R. (1984). Przegld metod wielokryterialnego programowania liniowego. Cz II, *Przegld statystyczny* **31**: 303–317.

Bodily, S. (1991). The Influence Diagram: A Modern Graphical Tool for Decision Modeling, *Collaborative Paper CP-91-17*, International Institute for Applied Systems Analysis, Laxenburg, Austria.

Steuer, R. (1986). *Multiple Criteria Optimization: Theory, Computation, and Application*, John Wiley & Sons, New York.

Zakrzewski, R. (1989). *Analiza liniowych modeli matematycznych za pomoc systemu MENTAT-L*, Praca magisterska, Instytut Automatyki i Informatyki Stosowanej, Politechnika Warszawska, Warszawa.

Osyczka, A. (1994). C Version of Computer Aided Multicriterion Opitimization System (CAMOS), *Paper presented at Workshop on Advances in Methodology and Software in DSS*, IIASA, Laxenburg.

Nakayama, H., Sawaragi, Y. (1984). Satisfacing Trade-off Method for Multiobjective Programming, *in* M. Grauer, A. Wierzbicki (red.), *Interactive Decision Analysis*, Vol. 229 of *Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems*, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York.

Makowski, M. (1991). Selected Issues of Design and Implementation of Decision Support Systems, *Working Paper WP-91-16*, International Institute for Applied Systems Analysis, Laxenburg, Austria.

Keeney, L., Raiffa, H. (1976). *Decisions with Multiple Objectives: Preferences and Value Tradeoffs*, John Wiley & Sons, New York.

Angehrn, A., Lüthi, H.-J. (1990). Intelligent Decision SupportSystems: A Visual Interactive Approach, *Interfaces* **20**(6): 17–28.

Wierzbicki, A. (1977). Basic Properties of Scalarizing Funcionals for Multiobjective Optimization, *Operationsforschung und Statistic, s. Optimization* **8**: 55–60.

Korhonen, P., Laakso, J. (1986). A Visual Interactive Method for Solving the Multiple Criteria Problem, *European Journal of Operational Research* **24**: 277–278.

Jarvenpaa, S., Dickson, G. (1988). Graphics and Managerial Decision Making: Research Based Guidelines, *Communications of the ACM* **31**(6): 764–773.

Conn, A., Gould, N., Toint, P. (1992). *LANCELOT. A Fortran Package for Large-Scale Nonlinear Optimization*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York.

Dreyfus, H., Dreyfus, S. (1986). *Mind over Machine. The Power of Human Intuition and Expertise in the Era of the Computer*, Basil Blackwell, Oxford.

Lewandowski, A., Wierzbicki, A. (red.) (1989). *Aspiration Based Decision Support Systems: Theory, Software and Applications*, Vol. 331 of *Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems*, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York.

Minch, R., Burns, J. (1983). Conceptual Design of Decision Support Systems Utilizing Management Science Models, *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics* **13**(4): 549–557.

Krglewski, T., Granat, J., Wierzbicki, A. P. (1991). IAC - DIDAS - N: A Dynamic Interactive Decision Analysis and Support System for Multicriteria Analysis of Nonlinear Models, *Working Paper CP-91-010*, International Institute for Applied Systems Analysis, Laxenburg, Austria.

Wierzbicki, A., Granat, J. (1996). Multi-Objective Modeling for Engineering Applications in Decision Support, *Proceedings of the Twelfth International Conference on Multiple Criteria Decision Making*, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, Springer Verlag, Berlin, New York. (accepted for publication).

Wierzbicki, A. (1986). On the completeness and constructiveness of parametric characterizations to vector optimization problems, *OR Spektrum* **8**: 73–87.

Granat, J., Krglewski, T., Paczyski, J., Stachurski, A., Wierzbicki, A. (1995). *A Modular System of Software Tools for Multicriteria Model Analysis*, Chapman & Hall.

Seo, F., Sakawa, M. (1988). *Multiple Criteria Decision Analysis in Regional Planning: Concepts, Methods and Applications*, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht.

Eliassen, A., Saltbones, J. (1983). Modeling of Long-Range Transport of Sulphur over Europe: A Two-year Model Run and some Model Experiments, *Atmospheric Environment* **17**(8): 1457–1473.

Somlyody, L., Masliev, I., Petrovic, P., Kularathana, M. (1994). Water Quality Management in the Nitra River Basin, *Collaborative Paper CP-94-02*, International Institute for Applied Systems Analysis, Laxenburg, Austria.

Berkemer, R., Makowski, M., Watkins, D. (1993). A Prototype of a Decision Support System for River Basin Water Quality Management in Central and Eastern Europe, *Working Paper WP-93-049*, International Institute for Applied Systems Analysis, Laxenburg, Austria.

Makowski, M., Somlyódy, L., Watkins, D. (1995). Multiple Criteria Analysis for Regional Water Quality Management: the Nitra River Case, *Working Paper WP-95-22*, International Institute for Applied Systems Analysis, Laxenburg, Austria.

Vanderpooten, D. (1989). The Interactive Approach in MCDA: A Technical Framework and some Basic Conceptions, *Math. Comput. Modelling* **12**(10): 1213–1220.

Vanderpooten, D., Vincke, P. (1989). Description and Analysis of some Representative Interactive Multicriteria Procedures, *Math. Comput. Modelling* **12**(10): 1221–1238.

Shin, W., Ravindran, A. (1991). Interactive Multiple Objective Optimization: Survey I - Continuous Case, *Computers Ops Res.* **18**(1): 97–114.

Cleveland, W., McGill, R. (1984). Graphical Perception: Theory, Experimentation, and Application to the Development of Graphical Methods, *Journal of the American Statistical Association* **79**(387): 531–554.

Tan, K., Benbasat, I. (1993). The Effectivenes of Graphical Presentation for Information Extraction: Acumulative Experimental Approach, *Decision Sciences* **24**: 167–191.

Lucas, H. (1981). An Experimental Investigation of the Use An Experimental Investigation of the Use of Computer-based Graphics in Decision Making, *Management Science* **27**(7): 757–768.

Korhonen, P. (1991). Using Harmonius Houses for Visual Pairwise Comparison of Multiplecriteria Alternatives, *Decision Support Systems* **7**: 47–54.

Lewandowski, A., Granat, J. (1991). Dynamic BIPLOT as the Interaction Interface for Aspiration Based Decision Support Systems, *in* P. Korhonen, A. Lewandowski, J. Wallenius (red.), *Multiple Criteria Decision Support*, Vol. 356 of *Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems*, Springer Verlag, Berlin, New York.

Gabriel, K. (1971). The biplot graphic display of matrices with application to principal component analysis, *Biometrica* **58**(3): 453–467.

Ng, W.-Y. (1991). An interactive descriptive graphical approach to data analysis for trade-off decisions in multi-objective programming, *Information and Decision Technologies* **17**: 133–149.

Granat, J. (1993). Parametric Programming Approaches to Local Approximation of the Efficient Frontier, *in* J. Wessels, A. Wierzbicki (red.), *User-Oriented Methodology and Techniques of Decision Analysis and Support*, Vol. 397 of *Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems*, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York.

Hemming, T., Troutt, M. (1992). GO-II, A Graphically Oriented System for Discrete Interactive Multi-Criterion Decisions, *Proceedings of the Tenth International Conference on Multiple Criteria Decision Making*, Taipei, Taiwan.

Belton, V., Vickers, S. (1992). VIDEA Integrated DEA and MCDA - A Visual Interactive Approach A Modyfication of Karmarkar's Algorithm to Multiobjective Linear Programming Problems, *Proceedings of the Tenth International Conference on Multiple Criteria Decision Making*, Taipei, Taiwan.

Zhao, C., Winkelbauer, L., Fedra, K. (1985). Advanced Decision Oriented Software for the Management of Hazardous Substances, Part VI: The Interactive Decision-Support Module, *Collaborative Paper CP-85-50*, International Institute for Applied Systems Analysis, Laxenburg, Austria.

Wilkelbauer, L., Markstrom, S. (1990). Inegration of AI with Quantitative Methods for Decision Support, Expert Systems with Applications, *AI International Journal* **1**(4): 345–358.