Przedziałowa metoda punktu odniesienia

Przyjmijmy ogólne sformułowanie problemu minimalizacji wielokryterialnej:

$$\min \{q_1(\mathbf{x}), q_2(\mathbf{x}), \ldots, q_m(\mathbf{x}) \ : \ \mathbf{x} \in X\}. \tag{1}$$

Funkcja $\mathbf{q} = (q_1, \ldots, q_m)$ przyporządkowuje każdemu wektorowi zmiennych decyzyjnych $\mathbf{x} \in X$ wektor ocen $\mathbf{y} = \mathbf{q}(\mathbf{x})$, który mierzy jakość decyzji $\mathbf{x}$ z punktu widzenia ustalonego układu funkcji oceny $q_1, \ldots, q_m$. Problemowi (1) odpowiada następujące zadanie w przestrzeni osiągalnych wektorów ocen:

$$\min \{y_1, y_2, \ldots, y_m \ : \ \mathbf{y} \in Y\}.$$

Przedziałowa metoda punktu odniesienia jest to technika interaktywna działająca według następujących reguł. Decydent określa swoje wymagania w terminach dwóch punktów odniesienia $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_m)$ i $\mathbf{r} = (r_1, \ldots, r_m)$. Pierwszy z nich wyraża pożądane (optymistyczne) wartości poszczególnych kryteriów nazywane tradycyjne poziomami aspiracji. Natomiast drugi wyraża wymagane (pesymistyczne) wartości poszczególnych kryteriów nazywane tradycyjnie poziomami rezerwacji. Na podstawie punktów odniesienia konstruowana jest skalaryzująca funkcja osiągnięcia. Maksymalizacja skalaryzującej funkcji osiągnięcia generuje rozwiązanie efektywne zadania wielokryterialnego (1). Uzyskane rozwiązanie efektywne jest prezentowane decydentowi do akceptacji lub jako podstawa do modyfikacji punktów odniesienia.

Skalaryzująca funkcja osiągnięcia przyjmuje postać:

$$S(\mathbf{y}) = \min_{i=1,\ldots,m} \{S_i(y_i, a_i, r_i)\} + \varepsilon \sum_{i=1}^{m} S_i(y_i, a_i, r_i), \tag{2}$$

gdzie ε jest arbitralnie małą stałą dodatnią, a $S_i : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dla $i = 1, \ldots, m$ są indywidualnymi funkcjami osiągnięcia mierzącymi osiągnięcia pojedynczych wskaźników y_i w sensie odpowiednich poziomów a_i i r_i. Skalaryzująca funkcja osiągnięcia jest zatem określona jako najgorsza indywidualna funkcja osiągnięcia, dodatkowo regularyzowana sumą wszystkich indywidualnych funkcji osiągnięcia. Człon regularyzujący ma na celu zapewnić efektywność rozwiązania dla przypadku, gdy maksymalizacja najgorszej indywidualnej funkcji osiągnięcia prowadzi do niejednoznaczności rozwiązania.

Indywidualna funkcja osiągnięcia S_i może być interpretowana jako pewna znormalizowana miara zadowolenia decydenta z aktualnej wartości i-tej funkcji oceny. Jest to ściśle malejąca funkcja zmiennej y_i z wartością $S_i = 1$

przy $y_i = a_i$, oraz $S_i = 0$ przy $y_i = r_i$. Do naszego modelu obliczeniowego będziemy stosować przedziałami liniową funkcję osiągnięcia:

$$S_i(y_i, a_i, r_i) = \begin{cases} \beta(y_i - a_i)/(a_i - r_i) + 1 & \text{dla } y_i \leqslant a_i, \\ (y_i - r_i)/(a_i - r_i) & \text{dla } a_i < y_i < r_i, \\ \gamma(y_i - r_i)/(a_i - r_i) & \text{dla } y_i \geqslant r_i, \end{cases}$$

gdzie β i γ są ustalonymi parametrami spełniającymi warunek $0 < \beta < 1 < \gamma$. Parametr $\gamma > 1$ odpowiada za niezadowolenie użytkownika z nieosiągnięcia poziomu rezerwacji, zaś parametr β odpowiada za dodatkowe zwiększenie zadowolenia użytkownika ponad poziom aspiracji. Tak określona indywidualna funkcja osiągnięcia jest ściśle malejąca i wklęsła, zatem może być przedstawiona w postaci:

$$S_i(y_i, a_i, r_i) = \min\left\{\beta\frac{y_i - a_i}{a_i - r_i} + 1, \frac{y_i - r_i}{a_i - r_i}, \gamma\frac{y_i - r_i}{a_i - r_i}\right\}.$$

Dzięki temu maksymalizacja skalaryzującej funkcji osiągnięcia (2) może być implementowana w postaci następującego zadania programowania liniowego (PL):

$$\max\left\{z + \varepsilon\sum_{i=1}^{m} z_i\right\}$$

przy ograniczeniach:

$$\begin{aligned} z &\leqslant z_i && \text{dla } i = 1, \ldots, m, \\ z_i &\leqslant \beta\frac{y_i - a_i}{a_i - r_i} + 1 && \text{dla } i = 1, \ldots, m, \\ z_i &\leqslant \frac{y_i - r_i}{a_i - r_i} && \text{dla } i = 1, \ldots, m, \\ z_i &\leqslant \gamma\frac{y_i - r_i}{a_i - r_i} && \text{dla } i = 1, \ldots, m, \end{aligned}$$

gdzie z_i dla $i = 1, \ldots, m$ i z to dodatkowe nieograniczone zmienne reprezentujące odpowiednio wartości indywidualnych funkcji osiągnięcia oraz ich minimum.