Uwzględnienie wielokryterialności w modelach preferencji uczestników rynku i modelach preferencji ogólnych

Włodzimierz Ogryczak

Raport Instytutu Automatyki i Informatyki Stosowanej Politechniki Warszawskiej

Październik, 2012

Raport nr: 12–10

Politechnika Warszawska
Instytut Automatyki i Informatyki Stosowanej
ul. Nowowiejska 15/19, 00–665 Warszawa
tel. 22-234-7397, fax 22-825-3719

Uwzględnienie wielokryterialności w modelach preferencji uczestników rynku i modelach preferencji ogólnych*

Włodzimierz Ogryczak

ogryczak@elka.pw.edu.pl

Październik, 2012

Steszczenie

Wiele decyzji dotyczących sprzedaży, czy zakupu dóbr lub usług publicznych, podejmowanych z zastosowaniem przetargów lub aukcji, wymaga uwzględnienia preferencji wielokryterialnych oraz występowania wielu atrybutów opisujących wymagania, zasoby, towary, itp. Zarówno decydent, który przeprowadza przetarg lub aukcję jak i oferenci, podejmując decyzje kierują się swoimi niezależnymi złożonymi celami, które często są celami wielokryterialnymi. Istotne jest przy tym także uwzględnienie złożonych interesów i celów społeczeństwa. Wielokryterialność celów uczestników przetargów i aukcji nie jest w dotychczasowej praktyce uwzględniona w sposób dostateczny. Przedmiotem badań będą różne rodzaje reguł rozstrzygania przetargów i aukcji z bezpośrednim uwzględnieniem wielokryterialności celów uczestników. Budowane będą różne modele decyzyjne i prowadzone symulacje działań możliwych reguł tak, aby otrzymywane rozwiązania były sprawiedliwe, efektywne oraz odporne na możliwe spekulacje uczestników.

Słowa kluczowe. teoria mechanizmów, optymalizacja, efektywność, zgodność motywacji, modelowanie wielokryterialne.

1 Wstęp

Wiele decyzji dotyczących sprzedaży, czy zakupu dóbr lub usług publicznych, podejmowanych z zastosowaniem przetargów lub aukcji, wymaga uwzględnienia preferencji wielokryterialnych oraz występowania wielu atrybutów opisujących wymagania, zasoby, towary, itp. Zarówno decydent, który przeprowadza przetarg lub aukcję jak i oferenci, podejmując decyzje kierują się swoimi niezależnymi złożonymi celami, które często są celami wielokryterialnymi. Istotne jest przy tym także uwzględnienie złożonych interesów i celów społeczeństwa. Wielokryterialność celów uczestników przetargów i aukcji nie jest w dotychczasowej praktyce uwzględniona w sposób dostateczny. Przedmiotem badań są tu różne rodzaje reguł rozstrzygania przetargów i aukcji z bezpośrednim uwzględnieniem wielokryterialności celów uczestników. Budowane aą różne modele decyzyjne i prowadzone symulacje działań możliwych reguł tak, aby otrzymywane rozwiązania były sprawiedliwe, efektywne oraz odporne na możliwe spekulacje uczestników. Podejmowane są próby zastosowanie podejścia punktu referencyjnego [35, 27] do planowania mechanizmów aukcyjnych [3]. Wymaga to jednak opracowania odpowiednich wariantów metody

*Praca naukowa finansowana ze środków na naukę w latach 2010–2013 jako projekt badawczy nr N N514 044438

punktu referencyjnego uwzględniających specyfikę przetargów i aukcji, oraz konstruowanie odpowiednich interakcyjnych procedur z uwzględnieniem mechanizmów uczenia. Innym podejściem do analizy wielokryterialnej jest skalaryzacja poszczególnych kryteriów w jedno, o odpowiednich własnościach. W szczególności tzw. porządkowa średnia ważona (ang. ordered weighted average - OWA) [38] używając wag preferencyjnych przypisywanych odpowiednio najgorszemu wynikowi, drugiemu najgorszemu itp. zachowując sumacyjny charakter umożliwia modelowanie różnych typów agregacji od egalitarnych po efektywnościowe. Porządkowe średnie ważone o odpowiednich własnościach monotoniczności wag preferencyjnych reprezentują koncepcje sprawiedliwej optymalizacji [13] i mogą być wprowadzone do modeli optymalizacyjnych za pomocą prostych nierówności liniowych. Tym samym odpowiednie systemy opisywane zależnościami liniowymi (bilansowanie dóbr podzielnych) mogą być łatwo optymalizowane technikami programowania liniowego. Nie dotyczy to jednak systemów i zagadnień opisywanych za pomocą modeli dyskretnych (bilansowanie dóbr niepodzielnych), które wymagają opracowania nowych algorytmów dokładnych lub przybliżonych.

2 Optymalizacja wielokryterialna

2.1 Dominacja wektorów ocen

Zadanie optymalizacji wielokryterialnej (wielokryterialne zadanie programowania matematycznego) może być sformułowane następująco:

$$\max\{(f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \ldots, f_m(\mathbf{x})) \quad : \quad \mathbf{x} \in Q\} \tag{1}$$

gdzie

$\mathbf{f} = (f_1, f_2, \ldots, f_m)$ jest funkcją (wektorową) przekształcającą przestrzeń decyzji $X = R^n$ w przestrzeń ocen $Y = R^m$,
poszczególne współrzędne f_i reprezentują skalarne funkcje oceny,
$I = \{1, 2, \ldots, m\}$ jest zbiorem indeksów ocen,

$Q \subset X$ oznacza zbiór dopuszczalny (zbiór decyzji dopuszczalnych),

$\mathbf{x} \in X$ oznacza wektor zmiennych decyzyjnych.

Funkcja $\mathbf{f}$ przyporządkowuje każdemu wektorowi zmiennych decyzyjnych $\mathbf{x} \in Q$ *wektor ocen* $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, który mierzy jakość decyzji $\mathbf{x}$ z punktu widzenia ustalonego układu funkcji oceny $f_1, \ldots, f_m$. Bez zmniejszania ogólności rozważań przyjęliśmy założenie, że dla każdej indywidualnej oceny f_i większa wartość oceny oznacza lepszą ocenę decyzji (maksymalizacja). Przyjęte sformułowanie zadania optymalizacji wielokryterialnej jest wyrażone w przestrzeni decyzji. Jest to naturalna reprezentacja problemu decyzyjnego, gdzie celem jest wybór właściwej decyzji.

Zakładamy, że wybór decyzji (rozwiązania) bierze pod uwagę tylko wektory ocen i decyzje o jednakowych wektorach ocen są jednakowo dobre. Tym samym, problem wyznaczenia najlepszej decyzji możemy ograniczyć do zagadnienia wyboru najlepszego wektora ocen w *zbiorze ocen osiągalnych* (osiągalnych wektorów ocen). Zbiór ocen osiągalnych (osiągalnych wektorów ocen)

$$A = \{\mathbf{y} : \mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in Q\}$$

Natomiast odpowiednia decyzja prowadząca do wybranego wektora ocen może być zidentyfikowana w końcowej fazie analizy problemu. Prowadzi to do modelu wielokryterialnego w przestrzeni ocen, gdzie oceny są bezpośrednio określone jako pojedyncze zmienne.

Model wielokryterialny w przestrzeni ocen

$$\max\{\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_m) \ : \quad \mathbf{y} \in A\}$$

Dla zadania optymalizacji wielokryterialnej (1) odpowiedni model w przestrzeni ocen otrzymujemy analitycznie wprowadzając explicite zmienne y_i reprezentujące oceny i stosując optymalizację do tych zmiennych:

$$\max\{\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_m) \ : \quad y_i = f_i(\mathbf{x}) \ \forall \ i, \quad \mathbf{x} \in Q\} \tag{2}$$

Oznacza to rozszerzenie zbioru dopuszczalnego do przestrzeni $X \times Y$ jako

$$Q_r = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \ : \quad \mathbf{x} \in Q, \quad \mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})\}$$

Zbiór ocen osiągalnych A jest rzutem tego zbioru na przestrzeń Y. W przypadku wielokryterialnych zadań programowania liniowego zbiór Q_r jest wielościennym zbiorem wypukłym i zbiór ocen osiągalnych jako jego rzut również jest wielościennym zbiorem wypukłym. Wypukłość zbioru ocen osiągalnych nie jest już jednak zagwarantowana w przypadku dowolnego wielokryterialnego zadania programowania wypukłego (tzn. wypukły zbiór dopuszczalny i wklęsłe funkcje oceny). Zbiór Q_r może być niewypukły i generować niewypukły zbiór ocen osiągalnych A.

W odróżnieniu od modeli optymalizacji jednokryterialnej model decyzyjny optymalizacji wielokryterialnej nie precyzuje ściśle jednej koncepcji najlepszego (optymalnego) rozwiązania. Zapis maksymalizacji w modelu wielokryterialnym oznacza jedynie, że dla każdej pojedynczej oceny preferowana jest większa wartość. Tym samym, rozważane preferencje są reprezentowane przez racjonalne relacje preferencji, spełniające warunki zwrotności, przechodniości i ścisłej monotoniczności.

Nawet nie znając relacji preferencji (wiedząc jedynie, że jest to racjonalna relacja preferencji), możemy stwierdzić, że pewne wektory ocen nie mogą być maksymalne w sensie danej relacji. Wynika to z faktu, że pewne wektory ocen są gorsze od innych dla wszystkich racjonalnych relacji preferencji. Można to sformalizować za pomocą relacji *racjonalnej dominacji*. Ponieważ model racjonalnych relacji preferencji jest najogólniejszym modelem preferencji, relację racjonalnej dominacji nazywa się po prostu *relacją dominacji*.

Relacja dominacji. Mówimy, że wektor ocen $\mathbf{y}'$ (racjonalnie) *dominuje* $\mathbf{y}''$, lub $\mathbf{y}''$ jest (racjonalnie) *dominowany* przez $\mathbf{y}'$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathbf{y}' \succ \mathbf{y}''$ dla wszystkich racjonalnych relacji preferencji.

Relację racjonalnej dominacji będziemy oznaczać symbolem $\succ_r$. Zapis $\mathbf{y}' \succ_r \mathbf{y}''$ oznacza, że wektor ocen $\mathbf{y}'$ racjonalnie dominuje $\mathbf{y}''$. Analogicznie do relacji racjonalnej dominacji możemy również zdefiniować relacje racjonalnej indyferencji $\cong_r$ i słabej dominacji $\succeq_r$. Zauważmy, że relacje racjonalnej dominacji, indyferencji i słabej dominacji spełniają warunki racjonalnej relacji preferencji. Relacja dominacji jest najogólniejszą racjonalną relacją preferencji i każda racjonalna relacja preferencji $\succeq$ jest z nią zgodna w tym sensie, że

$$\mathbf{y}' \succeq_r \mathbf{y}'' \quad \Rightarrow \quad \mathbf{y}' \succeq \mathbf{y}''$$

Relacja dominacji może być wyrażona za pomocą nierówności wektorowej po współrzędnych $\geq$. Przypomnijmy, że relacja $\geq$ z relacjami ścisłej preferencji i indyferencji określonymi odpowiednio jako $\gneq$ i $=$

$$\begin{array}{lcl} \mathbf{y}' \gneq \mathbf{y}'' & \Leftrightarrow & (\mathbf{y}' \geq \mathbf{y}'' \ \ \text{i} \ \ \mathbf{y}'' \not\geq \mathbf{y}') \\ \mathbf{y}' = \mathbf{y}'' & \Leftrightarrow & (\mathbf{y}' \geq \mathbf{y}'' \ \ \text{i} \ \ \mathbf{y}'' \geq \mathbf{y}') \end{array}$$

określa porządek Pareto.

Porządek Pareto pokrywa się z relacją (racjonalnej) dominacji:

$$\begin{array}{lclcl} \mathbf{y}' \succeq_r \mathbf{y}'' & \Leftrightarrow & \mathbf{y}' \geq \mathbf{y}'' & \Leftrightarrow & y_i' \geq y_i'' \quad \forall i = 1, 2, \ldots, m \\ \mathbf{y}' \succ_r \mathbf{y}'' & \Leftrightarrow & \mathbf{y}' \geqq \mathbf{y}'' & \Leftrightarrow & (\mathbf{y}' \geq \mathbf{y}'' \quad \text{i} \quad \mathbf{y}'' \not\geq \mathbf{y}') \\ \mathbf{y}' \cong_r \mathbf{y}'' & \Leftrightarrow & \mathbf{y}' = \mathbf{y}'' & \Leftrightarrow & (\mathbf{y}' \geq \mathbf{y}'' \quad \text{i} \quad \mathbf{y}'' \geq \mathbf{y}') \end{array}$$

Wektor ocen $\mathbf{y}'$ dominuje $\mathbf{y}''$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathbf{y}' \geqq \mathbf{y}''$. Zatem, dla każdej racjonalnej relacji preferencji $\succeq$ prawdziwe są następujące implikacje

$$\begin{array}{lcl} \mathbf{y}' \geq \mathbf{y}'' & \Rightarrow & \mathbf{y}' \succeq \mathbf{y}'' \\ \mathbf{y}' \geqq \mathbf{y}'' & \Rightarrow & \mathbf{y}' \succ \mathbf{y}'' \end{array}$$

2.2 Wektory niezdominowane i rozwiązania efektywne

Relacja dominacji zazwyczaj nie spełnia warunku spójności i dlatego może istnieć wiele wektorów ocen maksymalnych w sensie relacji racjonalnej dominacji, z których żaden nie jest największy. To znaczy, na ogół nie istnieje wektor ocen dominujący wszystkie pozostałe. Zatem relacja dominacji nie pozwala na jednoznaczne określenie najlepszego wektora ocen. Umożliwia ona jedynie wyróżnienie zbioru niezdominowanych wektorów ocen w odróżnieniu od zdominowanych wektorów ocen. Zdominowane wektory ocen odpowiadają oczywiście decyzjom nieoptymalnym, ponieważ są one gorsze od innych osiągalnych wektorów ocen w sensie każdej racjonalnej relacji preferencji. Jeżeli wektor ocen $\mathbf{y}''$ jest dominowany przez $\mathbf{y}'$, to może on być wyeliminowany z poszukiwań, ponieważ wszyscy racjonalni decydenci preferują $\mathbf{y}'$ w stosunku do $\mathbf{y}''$. Wystarczy zatem ograniczyć poszukiwania właściwego wyboru do niezdominowanych wektorów ocen.

Osiągalny wektor ocen $\mathbf{y} \in A$ nazywamy *(racjonalnie) niezdominowanym* wtedy i tylko wtedy, gdy nie istnieje $\mathbf{y}' \in A$ taki, że $\mathbf{y}$ jest dominowany przez $\mathbf{y}'$.

Zgodnie z definicją relacji dominacji, wektor ocen $\mathbf{y}^o \in A$ jest wektorem niezdominowanym wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $\mathbf{y} \in A$ istnieje (przynajmniej jedna) racjonalna relacja preferencji taka, że nie zachodzi $\mathbf{y} \succ \mathbf{y}^o$. Faktycznie spełniony jest silniejszy warunek, że dla każdego niezdominowanego wektora ocen istnieje (spójna) racjonalna relacja preferencji, przy której jest on najlepszy. Oznacza to, że nie znając preferencji decydenta nie możemy zawczasu wyeliminować żadnego niezdominowanego wektora ocen, bo przy pewnych racjonalnych preferencjach może on reprezentować najlepszy wybór. Formalizuje to twierdzenie 1

Twierdzenie 1 *Wektor ocen $\mathbf{y}^o \in A$ jest wektorem niezdominowanym wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje spójna racjonalna relacja preferencji $\succeq$ taka, że $\mathbf{y}^o \succeq \mathbf{y}$ dla wszystkich $\mathbf{y} \in A$.*

Niezdominowanie osiągalnego wektora ocen $\mathbf{y}^o$ można zweryfikować analitycznie rozwiązując zadanie optymalizacji

$$\max \{\sum_{i=1}^{m} z_i \ : \quad y_i = y_i^o + z_i, \ z_i \geq 0 \quad \text{dla } i = 1, 2, \ldots, m; \ \mathbf{y} \in A\} \tag{3}$$

Jeżeli wartość optymalna zadania wynosi 0, to $\mathbf{y}^o$ jest niezdominowanym wektorem ocen. W przeciwnym przypadku (czyli gdy wartość optymalna jest dodatnia) wektor ocen jest zdominowany.

Wyrażenie relacji dominacji w postaci porządku Pareto określa wektor ocen $\mathbf{y}^o \in A$ jako niezdominowany wtedy i tylko wtedy, gdy w zbiorze ocen osiągalnych A nie istnieje możliwość zwiększenia przynajmniej jednej jego współrzędnej bez zmniejszania jakiejkolwiek innej. Wynika z tego, że zbiór niezdominowanych wektorów ocen $N(A)$ jest częścią brzegu zbioru ocen osiągalnych A. W ogólnym wypadku może to być niespójny podzbiór brzegu zbioru wektorów osiągalnych. Z niespójnym zbiorem niezdominowanych wektorów ocen mamy oczywiście do czynienia w przypadku dyskretnego problemu wyboru, gdzie sam zbiór osiągalnych wektorów ocen jest niespójny.

Zauważmy, że rozszerzenie zbioru wektorów ocen osiągalnych A o zdominowane wektory ocen nie zmienia zbioru niezdominowanych wektorów ocen, czyli $N(A + D) = N(A)$. Można to wykorzystać do uproszczenia pewnych modeli wielokryterialnych. W szczególności, o ile zbiór ocen osiągalnych A dla wielokryterialnego problemu programowania wypukłego może nie być wypukły, to odpowiedni zbiór $A + D$ jest wypukły.

Pojęcie niezdominowanych wektorów ocen dotyczy elementów przestrzeni ocen Y. W wielokryterialnym problemie decyzyjnym interesują nas raczej odpowiednie wektory dopuszczalne w przestrzeni decyzji X. **Rozwiązanie efektywne.** Wektor dopuszczalny $\mathbf{x} \in Q$ nazywamy rozwiązaniem *efektywnym (Pareto-optymalnym, sprawnym)* zadania optymalizacji wielokryterialnej wtedy i tylko wtedy, gdy odpowiadający mu wektor ocen $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ jest wektorem niezdominowanym.

Z wcześniej prezentowanych własności niezdominowanych wektorów ocen wynikają następujące charakterystyki rozwiązań efektywnych:

- Wektor dopuszczalny $\mathbf{x}^o \in Q$ jest rozwiązaniem efektywnym zadania optymalizacji wielokryterialnej wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje racjonalna relacja preferencji $\succeq$ taka, że dla żadnego $\mathbf{x} \in Q$ nie zachodzi $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \succ \mathbf{f}(\mathbf{x}^0)$.
- Wektor dopuszczalny $\mathbf{x}^o \in Q$ jest rozwiązaniem efektywnym zadania optymalizacji wielokryterialnej wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje spójna racjonalna relacja preferencji $\succeq$ taka, że $\mathbf{f}(\mathbf{x}^0) \succeq \mathbf{f}(\mathbf{x})$ dla każdego $\mathbf{x} \in Q$.
- Wektor dopuszczalny $\mathbf{x}^o \in Q$ jest rozwiązaniem efektywnym zadania optymalizacji wielokryterialnej wtedy i tylko wtedy, gdy nie istnieje $\mathbf{x} \in Q$ taki, że $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \mathrel{\overline{>}} \mathbf{f}(\mathbf{x}^0)$.
- Wektor dopuszczalny $\mathbf{x}^o \in Q$ jest rozwiązaniem efektywnym zadania optymalizacji wielokryterialnej wtedy i tylko wtedy, gdy w zbiorze dopuszczalnym nie istnieje możliwość zwiększenia przynajmniej jednej oceny rozwiązania bez zmniejszania jakiejkolwiek innej.

Analogiczne do własności niezdominowania wektorów ocen, rozwiązania efektywne zadania optymalizacji wielokryterialnej pozostają rozwiązaniami efektywnymi przy zmianie kolejności ocen lub ich ściśle monotonicznego przeskalowania:

- Dla dowolnej permutacji τ zbioru $\{= 1, 2, \ldots, m\}$, wektor $\mathbf{x}^o \in Q$ jest rozwiązaniem efektywnym zadania optymalizacji wielokryterialnej wtedy i tylko wtedy, gdy jest rozwiązaniem efektywnym zadania

$$\max \{(f_{\tau(1)}(\mathbf{x}), f_{\tau(2)}(\mathbf{x}), \ldots, f_{\tau(m)}(\mathbf{x})) \ : \quad \mathbf{x} \in Q\}$$

- Dla dowolnych ściśle rosnących funkcji $s_i : R \to R$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$, wektor $\mathbf{x}^o \in Q$ jest rozwiązaniem efektywnym zadania optymalizacji wielokryterialnej wtedy i tylko wtedy, gdy jest rozwiązaniem efektywnym zadania

$$\max \{(s_1(f_1(\mathbf{x})), s_2(f_2(\mathbf{x})), \ldots, s_m(f_m(\mathbf{x}))) \ : \quad \mathbf{x} \in Q\}$$

Zauważmy, że efektywność rozwiązania nie zależy od kolejności użytych funkcji oceny i od ściśle monotonicznych zmian skal indywidualnych ocen.

Sformułowany wcześniej analityczny test niezdominowania osiągalnego wektora ocen (3) można odpowiednio stosować do weryfikacji efektywności danego wektora dopuszczalnego $\mathbf{x}^o \in Q$. W tym celu trzeba rozwiązać zadanie optymalizacji

$$\max \{\sum_{i=1}^{m} z_i \quad : \quad f_i(\mathbf{x}) = f_i(\mathbf{x}^o) + z_i,\ z_i \geq 0 \quad \text{dla } i = 1, 2, \ldots, m;\ \mathbf{x} \in Q\}$$

Jeżeli wartość optymalna zadania wynosi 0, to $\mathbf{x}^o$ jest rozwiązaniem efektywnym.

2.3 Szacowanie zbioru niezdominowanego

W ogólnym przypadku może nie istnieć żaden niezdominowany wektor ocen. To znaczy, zbiór wektorów niezdominowanych może być pusty, podobnie jak zbiór rozwiązań optymalnych optymalizacji jednokryterialnej może być pusty. Dzieje się tak na przykład, w przypadku zbioru ocen osiągalnych pokrywającego się z całą przestrzenią. Jest to jednak nierealistyczny przypadek, gdy wszystkie oceny mogą osiągać dowolne wartości. Naturalne jest ogranicznie rozważań do problemów, gdzie zbiory ocen osiągalnych są ograniczone, a przyjnajmniej ograniczone w kierunku ich optymalizacji.

Zadanie optymalizacji wielokryterialnej nazywamy *regularnym*, gdy zbiór ocen osiągalnych A jest niepusty i domknięty oraz istnieje wektor $\mathbf{y}^* \in Y$ dominujący wszystkie osiągalne wektory ocen $\mathbf{y} \in A$.

Dalsze rozważania ograniczamy do zadań regularnych. Dla takich zadań zawsze istnieje niezdominowany wektor ocen jak pokazuje poniższe twierdzenie.

Twierdzenie 2 *Jeżeli zbiór ocen osiągalnych $A \neq \emptyset$ jest domknięty i istnieje wektor $\mathbf{y}^* \in Y$ dominujący wszystkie osiągalne wektory ocen $\mathbf{y} \in A$, to istnieje niezdominowany wektor ocen $\mathbf{y}^o \in A$.*

Dowód: Niech $\mathbf{y}' \in A$ będzie dowolnym osiągalnym wektorem ocen. Rozpatrzmy zbiór

$$A' = \{\mathbf{y} \in A \quad : \quad \sum_{i=1}^{m} y_i \geq \sum_{i=1}^{m} y'_i\} \subset \{\mathbf{y} \in Y \quad : \quad y_i \leq y^*_i\ \forall\, i, \quad \sum_{i=1}^{m} y_i \geq \sum_{i=1}^{m} y'_i\}$$

A' jest ograniczonym zbiorem domkniętym i zadanie

$$\max \{\sum_{i=1}^{m} y_i \quad : \quad \mathbf{y} \in A'\}$$

ma rozwiązanie optymalne $\mathbf{y}^o \in A'$. Co więcej, dla każdego $\mathbf{y} \in A$ prawdziwa jest nierówność $\sum_i y^o_i \geq \sum_i y_i$, czyli $\mathbf{y}^o$ jest również rozwiązaniem optymalnym zadania

$$\min \{\sum_{i=1}^{m} y_i \quad : \quad \mathbf{y} \in A\} \tag{4}$$

Zauważmy, że relacja preferencji definiowana przez maksymalizację (4) wyraża się wzorem

$$\mathbf{y}' \succeq \mathbf{y}'' \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{i=1}^{m} y'_i \geq \sum_{i=1}^{m} y''_i$$

i jest racjonalną relacją preferencji. Zatem $\mathbf{y}^o$ jest wektorem najlepszym w sensie pewnej racjonalnej relacji preferencji i co za tym idzie jest niezdominowanym wektorem ocen. $\square$

Jako pierwszy krok analizy problemu decyzyjnego sformułowanego w postaci zadania optymalizacji wielokryterialnej stosuje się jednokryterialną optymalizację względem każdej funkcji oceny z osobna. Celem tej analizy jest rozpoznanie zakresu możliwych do osiągnięcia wartości ocen i identyfikacja konfliktu pomiędzy optymalizacją poszczególnych ocen. To znaczy, dla wszyskich $j = 1, 2, \ldots, m$ rozwiązywane są odpowiednie zadania optymalizacji jednokryterialnej

$$\max \{f_j(\mathbf{x}) \; : \quad \mathbf{x} \in Q\} \tag{5}$$

Dla regularnych zadań optymalizacji wielokryterialnej istnieją rozwiązania optymalne wszystkich takich zadań jednokryterialnych. Rozwiązując kolejne zadania optymalizujemy zawsze tylko jedną ocenę. Tym niemniej, wyznaczony dla każdego zadania optymalny wektor decyzji $\mathbf{x}^j$ określa też odpowiadający takiej optymalizacji jednokryterialnej wynikowy (m-wymiarowy) wektor ocen $\mathbf{y}^j = \mathbf{f}(\mathbf{x}^j)$. W rezultacie powstaje tak zwana *macierz realizacji celów* (ang. *pay-off matrix*), która pozwala na oszacowanie zakresu zmian poszczególnych funkcji oceny na zbiorze rozwiązań efektywnych, jak również dostarcza pewnych informacji na temat konfliktowości funkcji oceny. Macierz realizacji celów jest tablicą zawierającą wartości wszystkich funkcji oceny (wierszy) otrzymywane podczas rozwiązywania poszczególnych problemów jednokryterialnych (kolumn). To znaczy, elementy macierzy realizacji celów $\mathbf{T} = (t_{ij})_{i,j=1,\ldots,m}$ przyjmują wartości $t_{ij} = y_i^j = f_i(\mathbf{x}^j)$, gdzie $\mathbf{x}^j$ jest rozwiązaniem optymalnym jednokryterialnego zadania (5).

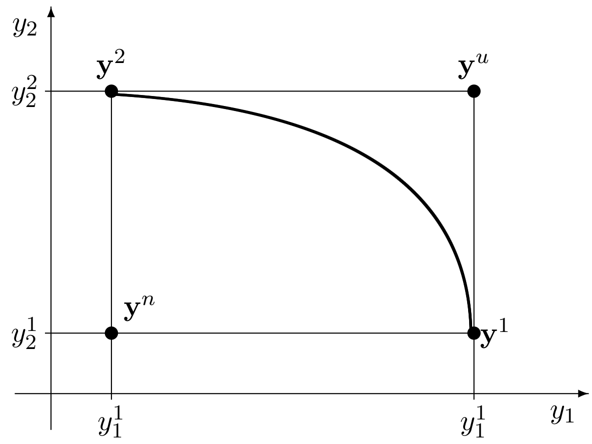
Wektor utopii $\mathbf{y}^u$ reprezentuje najlepsze wartości każdej funkcji oceny rozpatrywanej osobno, czyli wartości optymalne poszczególnych zadań optymalizacji jednokryterialnej.

Macierz realizacji celów generuje współrzędne wektora utopii na przekątnej ($y_i^u = t_{ii}$). Wektor utopii stanowi górne ograniczenie wszystkich osiągalnych wektorów ocen, tzn. $\mathbf{y}^u \geq \mathbf{y}$ dla każdego osiągalnego wektora ocen $\mathbf{y} \in A$. Sam wektor utopii jest zwykle nieosiągalny, czyli nie ma rozwiązania dopuszczalnego z takimi wartościami funkcji oceny. Gdyby wektor utopi był osiągalny to byłby on jedynym niezdominowanym wektorem ocen a wektor dopuszczalny generujący ten wektor byłby rozwiązaniem optymalnym zadania optymalizacji wielokryterialnej w sensie każdego racjonalnego modelu preferencji. Sytuacja taka może się zdarzyć tylko wtedy, gdy nie ma żadnego konfliktu pomiędzy funkcjami oceny.

Z macierzy realizacji celów można wyznaczyć również tzw. *wektor nadiru* $\mathbf{y}^n$, wyrażający najgorsze wartości dla każdej funkcji oceny odnotowane podczas poszczególnych optymalizacji jednokryterialnych, czyli $y_i^n = \min_j t_{ij}$. Wektory utopii i nadiru są przedstawione w dwuwymiarowej przestrzeni ocen na rysunku 1. Maksymalizując pierwszą ocenę wyznaczamy wektor $\mathbf{y}^1 = (y_1^1, y_2^1)$ i maksymalizując drugą ocenę otrzymujemy wektor $\mathbf{y}^2 = (y_1^2, y_2^2)$. Wektor utopii jest wtedy określony jako $\mathbf{y}^u = (y_1^1, y_2^2)$, a wektor nadiru jako $\mathbf{y}^n = (y_1^2, y_2^1)$.

W przedstawionym na rysunku 1 przypadku dwu ocen, wektor nadiru stanowi dolne ograniczenie wszystkich niezdominowanych wektorów ocen. To znaczy, $\mathbf{y}^n \leq \mathbf{y} \leq \mathbf{y}^u$ dla każdego $\mathbf{y} \in N(A)$. Wynika to z faktu, że wszystkie wektory ocen są dominowane przez wektor utopii. Jednocześnie wektory ocen o pierwszej współrzędnej mniejszej niż w wektorze nadiru $y_1 < y_1^n$ są dominowane przez wektor $\mathbf{y}^2$. Analogicznie, wektory ocen o drugiej współrzędnej mniejszej niż w wektorze nadiru $y_2 < y_2^n$ są dominowane przez wektor $\mathbf{y}^1$. Tym samym, wszystkie niezdominowane wektory ocen muszą się znaleźć w prostokącie określonym przez wektory nadiru i utopii. Ograniczenie to wynika z relacji dominacji wektorów ocen i jest prawdziwe niezależnie od tego czy zbiór ocen osiągalnych jest wypukły czy nie. W przypadku niejednoznacznych rozwiązań optymalnych zadań jednokryterialnych ograniczenie pozostaje prawdziwe z wektorem nadiru wyznaczonym przy dowolnych takich rozwiązaniach optymalnych. Najściślejsze ograniczenie uzyskamy wtedy jednak wybierając niezdominowe wektory $\mathbf{y}^1$ i $\mathbf{y}^2$.

Niestety w ogólnym przypadku dowolnej liczby ocen składowe wektora nadiru nie muszą wyrażać najgorszych wartości odpowiednich funkcji oceny na całym zbiorze rozwiązań efektywnych. To znaczy, w przypadku liczby ocen większej niż dwie nie można zagwarantować, że



Rys. 1: Wektory utopii i nadiru

$\mathbf{y}^n \leq \mathbf{y}$ dla każdego $\mathbf{y} \in N(A)$. Ilustruje to następujący prosty przykład problemu dyskretnego z trzema ocenami.

W przypadku trzech lub więcej ocen wektor nadiru nie musi ograniczać z dołu zbioru niezdominowanych wektorów ocen. Współrzędne wektora nadiru wyrażają jedynie najgorsze (najmniejsze) wartości każdej funkcji zanotowane podczas optymalizacji innych funkcji. Wyznaczenie wektora $\mathbf{y}^w$ takiego, że $\mathbf{y}^w \leq \mathbf{y}$ dla każdego $\mathbf{y} \in N(A)$ jest złożonym zadaniem obliczeniowym. Wektor nadiru stanowi górne ograniczenie wektora $\mathbf{y}^w$ i na ogół jego dobre przybliżenie wystarczające do wstępnego zorientowania się w zakresach zmienności poszczególnych ocen dla różnych rozwiązań efektywnych.

Zadania optymalizacji jednokryterialnej (5) mogą mieć niejednoznaczne rozwiązania optymalne i generować rozwiązania nieefektywne o zaniżonych wartościach ocen nie podlegających maksymalizacji w danym zadaniu. Zatem, w ogólnym przypadku, macierz realizacji celów jest niejednoznacznie określona i współczynniki wektora utopii stanowią jedyną informację niezależną od wyboru rozwiązania optymalnego w zadaniach jednokryterialnych. Dla zapewnienia użyteczności pozostałych współczynników konieczne jest zastosowanie techniki regularyzacyjnej podczas wyliczania macierzy realizacji celów, tak aby każde jednokryterialne rozwiązanie optymalne było jednocześnie rozwiązaniem efektywnym oryginalnego problemu wielokryterialnego. W przypadku niewielkiej liczby funkcji oceny (małe m) możliwe jest wyznaczenie rozszerzonej macierzy realizacji celów, opartej na rozwiązaniach zadań leksykograficznych

$$\text{lexmax}\ \{(f_{\tau(1)}(\mathbf{x}), f_{\tau(2)}(\mathbf{x}), \ldots, f_{\tau(m)}(\mathbf{x}))\ :\quad \mathbf{x} \in Q\} \tag{6}$$

dla wszystkich możliwych hierarchii funcji oceny (dla wszystkich permutacji τ).

2.4 Podstawowe skalaryzacje

Rozwiązanie efektywne zadania optymalizacji wielokryterialnej

$$\max\{(f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \ldots, f_m(\mathbf{x}))\ :\quad \mathbf{x} \in Q\}$$

stanowi uogólnienie pojęcia rozwiązania optymalnego i w przypadku optymalizacji jednokryterialnej ($m = 1$) te dwa pojęcia są tożsame. Tym niemniej, istnieje istotna różnica pomiędzy tymi dwoma pojęciami jako koncepcjami rozwiązań odpowiednich zadań. W optymalizacji jednokryterialnej wszystkie rozwiązania optymalne dają ten sam wynik. Naturalną formalizacją zadania optymalizacji jednokryterialnej jest więc problem wyznaczenia dowolnego rozwiązania optymalnego. W optymalizacji wielokryterialnej różne rozwiązania efektywne generują różne i wzajemnie nieporównywalne wektory ocen. Jedyną formalną specyfikacją matematycznego zadania optymalizacji wielokryterialnej może być wyznaczenie wszystkich rozwiązań efektywnych. Jest to zazwyczaj zdanie skomplikowane i poza przypadkiem problemu dwukryterialnego w niewielkim stopniu przybliżające do rozwiązania odpowiedniego problemu decyzyjnego. Niewątpliwie poszukiwania rozwiązania problemu decyzyjnego powinny być ograniczone do zbioru rozwiązań efektywnych zadania optymalizacji wielokryterialnej i dlatego istotne są techniki generowania takich rozwiązań.

Pojedyncze rozwiązania efektywne zadania optymalizacji wielokryterialnej można wyznaczać poszukując w zbiorze ocen osiągalnych A wektorów największych w sensie pewnej spójnej racjonalnej relacji preferencji. W szczególności, można w tym celu rozwiązywać jednokryterialne skalaryzacje zadania.

Skalaryzacją zadania optymalizacji wielokryterialnej nazywamy zadanie optymalizacji jednokryterialnej

$$\max \{s(f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \ldots, f_m(\mathbf{x})) \;:\; \mathbf{x} \in Q\} \tag{7}$$

z *funkcją skalaryzującą* $s : R^m \to R$.

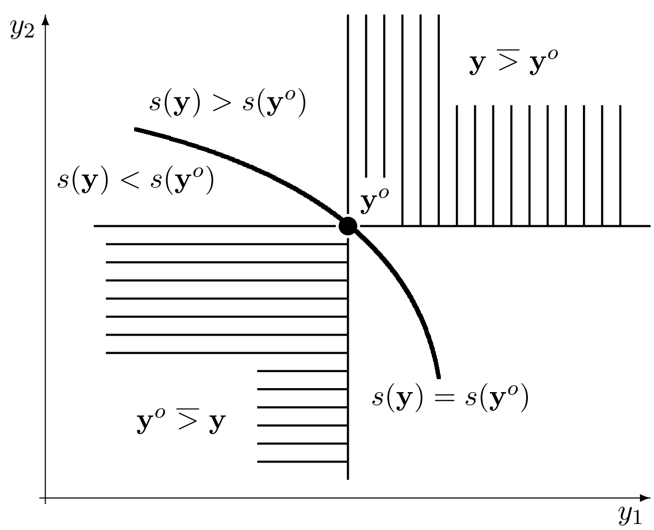
Maksymalizacja funkcji skalaryzującej s definiuje relację preferencji

$$\mathbf{y}' \succeq \mathbf{y}'' \quad \Leftrightarrow \quad s(\mathbf{y}') \geq s(\mathbf{y}'')$$

Zauważmy, że relacja ta jest zawsze spójna, zwrotna i przechodnia.

Jeżeli funkcja skalaryzująca s jest ściśle rosnąca po współrzędnych, to jej relacja preferencji jest ściśle monotoniczna i rozwiązanie optymalne skalaryzacji jest rozwiązaniem efektywnym zadania optymalizacji wielokryterialnej.

W przypadku funkcji skalaryzującej s ściśle rosnącej po współrzędnych zbiór wektorów ocen preferowanych w stosunku do $\mathbf{y}^o \in A$ (zbiór wektorów o większych wartościach $s(\mathbf{y})$) zawiera w sobie cały zbiór wektorów ocen dominujących $\mathbf{y}^o$. Analogicznie, zbiór preferowanych wektorów ocen o mniejszych wartościach $s(\mathbf{y})$ zawiera w sobie cały zbiór wektorów ocen dominowanych przez $\mathbf{y}^o$ (por. rys. 2).



Rys. 2: Relacja preferencji skalaryzacji monotonicznej

Często funkcje skalaryzujące są tylko niemalejące (słabo monotoniczne) po współrzędnych. Są to również skalaryzacje użyteczne przy generacji rozwiązań efektywnych. Niech $\mathbf{x}^o \in Q$ będzie rozwiązaniem optymalnym zadania (7) ze słabo monotoniczną funkcją skalaryzującą s. Jeżeli $\mathbf{x}^o$ nie jest rozwiązaniem efektywnym, to istnieje $\mathbf{y} \in A$ taki, że $\mathbf{y} \gneqq \mathbf{y}^o = \mathbf{f}(\mathbf{x}^0)$. Ponieważ funkcja s jest niemalejąca, prawdziwa jest wtedy nierówność $s(\mathbf{y}) \geq s(\mathbf{y}^o)$, co w połączeniu z optymalnością $\mathbf{x}^o$ oznacza równość $s(\mathbf{y}) = s(\mathbf{y}^o)$. Tym samym, możemy stwierdzić co następuje.

Jeżeli funkcja skalaryzująca s jest słabo monotoniczna (niemalejąca) po współrzędnych, to skalaryzacja zadania optymalizacji wielokryterialnej posiada następujące własności:

- zbiór rozwiązań optymalnych skalaryzacji zawiera rozwiązanie efektywne zadania optymalizacji wielokryterialnej;
- jednoznaczne w przestrzeni ocen rozwiązanie optymalne skalaryzacji jest rozwiązaniem efektywnym zadania optymalizacji wielokryterialnej;
- w przypadku braku jednoznaczności dane rozwiązanie skalaryzacji może być zdominowane przez inne alternatywne rozwiązanie optymalne tej skalaryzacji.

Najprostsza skalaryzacja polega na wyborze jednej ustalonej funkcji oceny f_k $(k \in I)$, czyli $s(\mathbf{y}) = y_k$. Tak określona funkcja skalaryzująca jest niemalejąca po współrzędnych, ale nie jest ściśle rosnąca (jest stała poza k-tą współrzędną).

Dla zadań optymalizacji jednokryterialnej

$$\max \{f_k(\mathbf{x}) \ : \ \mathbf{x} \in Q\}, \qquad k \in I \tag{8}$$

zbiór rozwiązań optymalnych zawiera rozwiązanie efektywne zadania optymalizacji wielokryterialnej, a jednoznaczne w przestrzeni ocen rozwiązanie optymalne zadania (8) jest rozwiązaniem efektywnym.

Dla wyznaczenia rozwiązania efektywnego zgodnego z maksymalizacją funkcji oceny f_k możemy rozszerzyć zadanie (8) do odpowiedniego zadania leksykograficznego. To znaczy, wprowadzić hierarchię ocen określoną permutacją τ zbioru $I = \{= 1, 2, \ldots, m\}$ taką, że $\tau(1) = k$. Dla dowolnej permutacji rozwiązanie optymalne zadania leksykograficznego

$$\text{lexmax} \{(f_{\tau(1)}(\mathbf{x}), f_{\tau(2)}(\mathbf{x}), \ldots, f_{\tau(m)}(\mathbf{x})) \ : \ \mathbf{x} \in Q\}$$

jest rozwiązaniem efektywnym zadania optymalizacji wielokryterialnej. Zadanie leksykograficzne określa następujący ciąg zadań skalarnych:

Dla $j = 1, 2, \ldots, m$ wyznaczamy zbiór S_j rozwiązań optymalnych zadania (gdzie $S_0 = Q$):

$$\mathrm{P}_j \ : \ \max \{s_j(\mathbf{f}(\mathbf{x})) \ : \ \mathbf{x} \in S_{j-1}\}$$

Każdy element zbioru S_m jest rozwiązaniem optymalnym zadania leksykograficznego. Najprostszą techniką definiowania zbiorów S_j jest zapisywanie ich za pomocą warunków

$$s_t(\mathbf{f}(\mathbf{x})) = z_t \quad \text{dla } t = 1, 2, \ldots, j$$

gdzie z_t jest wartością optymalną funkcji celu w zadaniu P_t. Prowadzi ona do tzw. podejścia sekwencyjnego, czyli rozwiązywania ciągu zadań o rosnącej liczbie ograniczeń. Podejście sekwencyjne może być łatwo stosowane do dowolnych typów problemów (zarówno liniowych, jak i nieliniowych) i implementowane z wykorzystaniem standardowych procedur optymalizacji jednokryterialnej odpowiedniego typu.

Szczególnym przypadkiem funkcji skalaryzującej spełniającej warunek ścisłej monotoniczności jest suma indywidualnych ocen $s(\mathbf{y}) = \sum_i y_i$.

Rozwiązanie optymalne zadania *skalarazycji sumacyjnej*

$$\max \{\sum_{i=1}^{m} f_i(\mathbf{x}) \;\; : \quad \mathbf{x} \in Q\}$$

jest rozwiązaniem efektywnym zadania optymalizacji wielokryterialnej.

Powszechnie stosowaną techniką wyznaczania rozwiązań efektywnych jest *metoda ważenia ocen* oparta na skalaryzacji za pomocą ważonej sumy ocen, czyli $s(\mathbf{y}) = \sum_i w_i y_i$, gdzie wagi w_i są liczbami dodatnimi. Zwykle przyjmuje się wagi znormalizowane, tak aby sumowały się do jedności. Ważona suma ocen wyraża wtedy średnią ważoną poszczególnych ocen. Poprawność techniki ważenia ocen wynika z możliwości jej wyrażenia jako maksymalizacji sumy skalowanych ocen, podczas gdy (ściśle) rosnące skalowanie ocen przez dodatnie wagi nie wpływa na efektywność rozwiązania.

Dla dowolnych dodatnich wag $w_i > 0$ rozwiązanie optymalne *skalaryzacji ważonej*

$$\max \{\sum_{i=1}^{m} w_i f_i(\mathbf{x}) \;\; : \quad \mathbf{x} \in Q\} \tag{9}$$

jest rozwiązaniem efektywnym zadania optymalizacji wielokryterialnej.

Zauważmy, że w zadaniu optymalizacji skalaryzacji ważonej sumy (9), przemnożenie (lub podzielenie) wszystkich wag przez pewną liczbę dodatnią nie ma żadnego wpływu na rozwiązanie optymalne zadania. Tym samym, nie ma znaczenia czy wagi zostały znormalizowane aby sumować się do jedności, czy nie.

Skalaryzacja ważona generuje zawsze (dla dowolnych dodatnich wag) niezdominowany wektor ocen niezależnie od struktury zadania optymalizacji wielokryterialnej. Natomiast w ogólnym przypadku, nie jest prawdą, że każdy niezdominowany wektor ocen może być wyznaczony w ten sposób przy odpowiednim doborze. Okazuje się, że nawet w przypadku wypukłego zbioru ocen osiągalnych, istnieją niezdominowane wektory ocen nie maksymalizujące ważonej sumy ocen przy żadnym zestawie dodatnich wag.

Metoda ważenia ocen z odpowiednio dobieranymi wagami teoretrycznie pozwala na wyznaczenie dowolnego rozwiązania efektywnego wielokryterialnego zadania programowania liniowego. To znaczy, dla każdego $\mathbf{x}^o$ rozwiązania efektywnego wielokryterialnego zadania programowania liniowego istnieją dodatnie wagi w_i takie, że $\mathbf{x}^o$ jest rozwiązaniem optymalnym odpowiedniej skalaryzacji ważonej (9). Jest to jednak fakt o większym znaczeniu teoretycznym niż praktycznym z punktu widzenia wspomagania decyzji.

Maksymalizacja funkcji skalaryzującej w postaci sumy ocen może być interpretowana jako wyznaczanie rozwiązania o najlepszej średniej ocenie. Podobnie można rozpatrywać maksymalizację najgorszej oceny, czyli *skalaryzację maksyminową*. Funkcja skalaryzująca $\min_i y_i$ nie jest funkcją liniową. Jest ona jednak wklęsłą funkcją kawałkami liniową i dlatego jej maksymalizacja może być zapisana za pomocą zależności liniowych

$$\max \{z \;\; : \quad z \le y_i \quad \text{dla } i = 1, 2, \ldots, m; \;\; \mathbf{y} \in A\}$$

Funkcja minimum jest niemalejąca po współrzędnych, ale nie jest ściśle rosnąca. Dlatego prawdziwe jest następujące stwierdzenie.

Zbiór rozwiązań optymalnych skalaryzacji maksyminowej

$$\max \{\min_{i=1,\ldots,m} f_i(\mathbf{x}) \;\; : \quad \mathbf{x} \in Q\}$$

zawiera rozwiązanie efektywne zadania optymalizacji wielokryterialnej, a jednoznaczne w przestrzeni ocen rozwiązanie optymalne skalaryzacji jest rozwiązaniem efektywnym.

W ogólnym przypadku zbiór optymalny skalaryzacji maksyminowej może zawierać zdominowane i niezdominowane wektory ocen.

Skalaryzację maksyminową, podobnie jak sumę ocen, można rozpatrywać z wagami. Jeżeli wagi są dodatnie, to funkcja skalaryzująca ważonego minimum pozostaje funkcją niemalejącą po współrzędnych.

Dla dowolnych dodatnich wag $w_i > 0$, zbiór rozwiązań optymalnych *maksyminowej skalaryzacji ważonej*

$$\max \{ \min_{i=1,\ldots,m} \; w_i f_i(\mathbf{x}) \;\; : \;\;\; \mathbf{x} \in Q \}$$

zawiera rozwiązanie efektywne zadania optymalizacji wielokryterialnej, a jednoznaczne w przestrzeni ocen rozwiązanie optymalne skalaryzacji jest rozwiązaniem efektywnym.

Twierdzenie 3 *Jeżeli wszystkie osiągalne oceny przyjmują wyłącznie dodatnie wartości, to dla każdego rozwiązania efektywnego $\mathbf{x}^o$ zadania optymalizacji wielokryterialnej istnieją dodatnie wagi w_i takie, że $\mathbf{x}^o$ jest jednoznacznym w przestrzeni ocen rozwiązaniem optymalnym zadania maksyminowej skalaryzacji ważonej*

$$\max \{ \min_{i=1,\ldots,m} \; w_i f_i(\mathbf{x}) \;\; : \;\;\; \mathbf{x} \in Q \}$$

Dowód: Niech $\mathbf{y}^o = \mathbf{f}(\mathbf{x}^0)$. Z założeń twierdzenia wynika, że można przyjąć $w_i = 1/y_i^o > 0$. Przy tak określonych wagach mamy

$$w_1 y_1^o = w_2 y_2^o = \ldots = w_m y_m^o$$

Z efektywności wektora $\mathbf{x}^o$ wynika, że nie istnieje $\mathbf{y} \in A$ spełniający nierówność $\mathbf{y} \geqq \mathbf{y}^o$. Dla każdego wektora $\mathbf{y}$ istnieje więc indeks k taki, że $y_k < y_k^o$. Stąd

$$\min_{i=1,\ldots,m} \; w_i y_i^o = w_k y_k^o > w_k y_k \geq \min_{i=1,\ldots,m} \; w_i y_i$$

Zatem $\mathbf{x}^o$ jest jednoznacznym w przestrzeni ocen rozwiązaniem optymalnym odpowiedniej maksyminowej skalaryzacji ważonej. □

2.5 Funkcje osiągnięcia

Wprowadzenie do podstawowych skalaryzacji współczynników wagowych wzbogaca te koncepcje przekształcając je w odpowiednie techniki prarametryczne umożliwiające modelowanie różnych preferencji i generowanie różnych rozwiązań efektywnych. Oczywiście, tak prosta parametryzacja daje ograniczone możliwości modelowania różnych preferencji wyboru. Ogólnie można wprowadzić do podstawowych skalaryzacji dowolne ściśle rosnące funkcje skalujące oceny. Dla istotnego rozszerzenia modelu przy zachowaniu prostej parametrycznej natury skalaryzacji istotne jest tu przede wszystkim dopuszczenie możliwości przesuwania układu współrzędnych w przestrzeni ocen. Najprostsze takie funkcje skalujące przyjmują zatem liniową postać $s_i(y_i) = w_i(y_i - v_i)$, gdzie w_i jest dodatnią wagą (czynnikiem skalującym), a v_i współrzędną początku układu (poziomem odniesienia skali). Funkcje skalujące dopuszczające przesunięcie początku układu współrzędnych w przestrzeni ocen są zwykle nazywane *(indywidualnymi) funkcjami osiągnięcia.* Funkcje te mierzą bowiem osiągnięcia względem pewnego ustalonego wektora ocen przyjmowanego jako początek układu współrzędnych. Funkcja skalaryzująca indywidualne funkcje osiągnięcia jest nazywana *(skalaryzującą) funkcją osiągnięcia.*

Rozpatrzmy maksyminową skalaryzację funkcji osiągnięcia. Jeżeli funkcje osiągnięcia s_i są niemalejące, to skalaryzująca funkcja osiągnięcia jest funkcją niemalejącą po współrzędnych. Prawdziwe jest zatem następujące stwierdzenie.

Dla dowolnych niemalejących funkcji osiągnięcia s_i, zbiór rozwiązań optymalnych *maksyminowej skalarazycji funkcji osiągnięcia*

$$\max \{ \min_{i=1,\ldots,m} s_i(f_i(\mathbf{x})) \ : \quad \mathbf{x} \in Q \} \tag{10}$$

zawiera rozwiązanie efektywne zadania wielokryterialnego, a jednoznaczne w przestrzeni ocen rozwiązanie optymalne skalaryzacji jest rozwiązaniem efektywnym zadania wielokryterialnego.

Pokazywaliśmy wcześniej, że w przypadku dodatnich wartości ocen, dowolne rozwiązanie efektywne $\mathbf{x}^o$ zadania optymalizacji wielokryterialnej jest jednoznacznym w przestrzeni ocen rozwiązaniem optymalnym maksyminowej skalaryzacji ważonej z odpowiednio dobranymi wagami (por. twierdzenie 3). Dopuszczenie możliwości przesuwania układu odniesienia pozwala nam rozszerzyć tę parametryczną technikę generacji rozwiązań efektywnych na dowolne zadania o ograniczonych zbiorach niezdominowanych ocen. Jeżeli zbiór ocen osiągalnych A jest ograniczony, to istnieje wektor ocen $\mathbf{y}^d$ ograniczający z dołu wszystkie osiągalne wektory ocen ($\mathbf{y}^d < \mathbf{y}$ dla wszystkich $\mathbf{y} \in A$). Dokonując przesunięcia układu współrzędnych do punktu $\mathbf{y}^d$ otrzymujemy wszystkie oceny $y'_i = y_i - y^d_i$ dodatnie, co gwarantuje możliwość określenia wag dla wyznaczenia dowolnego rozwiązania efektywnego z odpowiedniej skalaryzacji maksyminowej z funkcjami osiągnięcia $s_i(y_i) = w_i(y_i - y^d_i)$. Dokładniej, następująca zależność jest prawdziwa.

Jeżeli wszystkie osiągalne oceny są (ostro) ograniczone z dołu przez wektor $\mathbf{y}^d$, to dla każdego rozwiązania efektywnego $\mathbf{x}^o$ zadania optymalizacji wielokryterialnej istnieją dodatnie wagi $w_i = 1/(f_i(\mathbf{x}^o) - y^d_i)$ takie, że $\mathbf{x}^o$ jest jednoznacznym w przestrzeni ocen rozwiązaniem optymalnym zadania

$$\max \{ \min_{i=1,\ldots,m} w_i(f_i(\mathbf{x}) - y^d_i) \ : \quad \mathbf{x} \in Q \}$$

Przy wspomaganiu decyzji bardziej naturalne jest formułowanie funkcji osiągnięcia z punktu widzenia górnego ograniczenia ocen osiągalnych niż dolnego. Tak również może być wykorzystana skalaryzacja maksyminowa. Niech $\mathbf{y}^*$ będzie wektorem ocen (ostro) większym od wszystkich osiągalnych wektorów ocen. Zauważmy, że warunek ten spełnia dowolny wektor o współrzędnych większych od wektora utopii. Dla każdego rozwiązania efektywnego $\mathbf{x}^o$ zadania optymalizacji wielokryterialnej istnieją wtedy dodatnie wagi w_i takie, że $\mathbf{x}^o$ jest jednoznacznym w przestrzeni ocen rozwiązaniem optymalnym zadania maksyminimalizacji z funkcjami osiągnięcia postaci

$$s_i(y_i) = w_i(y_i - y^*_i) \quad \text{dla } i = 1, 2, \ldots, m$$

Wystarczy w tym celu przyjąć $w_i = 1/(y^*_i - y^o_i)$, gdzie $\mathbf{y}^o = f_i(\mathbf{x}^o)$. Zauważmy, że ta technika generacji polega na wyznaczaniu wektorów ocen najbliższych punktowi $\mathbf{y}^*$ w sensie ważonej normy maksimum.

Twierdzenie 4 *Jeżeli dla wszystkich osiągalnych wektorów ocen $\mathbf{y} \in A$ prawdziwa jest nierówność $\mathbf{y}^* > \mathbf{y}$, to dla każdego rozwiązania efektywnego $\mathbf{x}^o$ zadania optymalizacji wielokryterialnej istnieją dodatnie wagi w_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$ takie, że $\mathbf{x}^o$ jest jednoznacznym w przestrzeni ocen rozwiązaniem optymalnym skalaryzacji maksyminowej*

$$\max \{ \min_{i=1,\ldots,m} s_i(f_i(\mathbf{x})) \ : \quad \mathbf{x} \in Q \}$$

z funkcjami osiągnięcia postaci

$$s_i(y_i) = w_i(y_i - y^*_i) \quad \textit{dla } i = 1, 2, \ldots, m$$

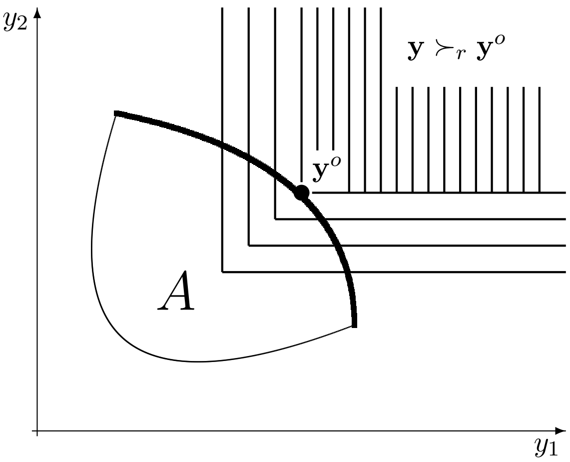
5Przy tak określonych wagach w_i,

Okazuje się, że wystarczy odpowiednio przesunąć początek układu współrzędnych w przestrzeni ocen aby móc wyznaczyć dowolne rozwiązanie efektywne jako rozwiązanie optymalne skalaryzacji maksyminowej. Mianowicie, rozwiązanie efektywne $\mathbf{x}^o$ zadania optymalizacji wielokryterialnej jest jednoznacznym w przestrzeni ocen rozwiązaniem optymalnym zadania (10) z funkcjami osiągnięcia postaci

$$s_i(y_i) = y_i - f_i(\mathbf{x}^o) \quad \text{dla } i = 1, 2, \ldots, m$$

Poniższe twierdzenie wyraża ogólniejszy fakt, że rozwiązanie efektywne $\mathbf{x}^o$ zadania optymalizacji wielokryterialnej jest jednoznacznym w przestrzeni ocen rozwiązaniem optymalnym zadania skalaryzacji maksyminowej z dowolnymi ściśle rosnącymi funkcjami osiągnięcia spełniającymi warunek

$$s_1(y_1^o) = s_2(y_2^o) = \ldots = s_m(y_m^o)$$



Rys. 3: Wektor niezdominowany jako rozwiązanie optymalne skalaryzacji maksyminowej

Twierdzenie 5 *Niezdominowany wektor ocen $\mathbf{y}^o \in A$ jest jednoznacznym rozwiązaniem optymalnym skalaryzacji maksyminowej*

$$\max \{ \min_{i=1,\ldots,m} s_i(y_i) \;:\; \mathbf{y} \in A \}$$

ze ściśle rosnącymi funkcjami osiągnięcia spełniającymi warunek

$$s_1(y_1^o) = s_2(y_2^o) = \ldots = s_m(y_m^o)$$

Podsumowując możemy stwierdzić, że maksyminowe funkcje osiągnięcia umożliwiają wyznaczenie dowolnego niezdominowanego wektora ocen.

Dla każdego rozwiązania efektywnego $\mathbf{x}^o$ zadania optymalizacji wielokryterialnej istnieją ściśle rosnące liniowe funkcje osiągnięcia s_i takie, że $\mathbf{x}^o$ jest rozwiązaniem optymalnym zadania skalarazycji maksyminowej.

Wprowadzenie liniowej funkcji osiągnięcia $s(\mathbf{y}) = \sum_i w_i(y_i - v_i)$, nie wzbogaca zakresu preferencji modelowanych za pomocą skalaryzacji ważonej sumy. Zauważmy, że dla dowolnego przesunięcia układu współrzędnych v

$$\sum_{i=1}^{m} w_i(y_i' - v_i) \geq \sum_{i=1}^{m} w_i(y_i'' - v_i) \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{i=1}^{m} w_i y_i' \geq \sum_{i=1}^{m} w_i y_i''$$

To oznacza, że relacja preferencji modelowana za pomocą ważonej skalaryzowanej funkcji osiągnięcia jest identyczna z relacją modelowaną przez ważoną sumę ocen. Tym samym, wprowadzenie możliwości przesuwaniu układu odniesienia nie zwiększa możliwości modelowych techniki ważenia ocen.

2.6 Regularyzowane skalaryzacje

Zbiór rozwiązań optymalnych skalaryzacji definiującej relację preferencji spełniającej jedynie warunek słabej monotoniczności zawiera rozwiązanie efektywne zadania optymalizacji wielokryterialnej. Może on jednak zawierać również pewne nieefektywne rozwiązania optymalne, a standardowe procedury obliczeniowe optymalizacji jednokryterialnej wyznaczają na ogół tylko jedno rozwiązanie optymalne (które może być nieefektywne). Dla praktycznego wykorzystania tych skalaryzacji w procesie wspomagania decyzji potrzebne jest uściślenie wyboru rozwiązania optymalnego tak, aby zagwarantować efektywność wyznaczonego rozwiązania. Takie uściślenie będziemy dalej nazywać *regularyzacją skalaryzacji*.

Istotną zaletą skalaryzacji jest możliwość wykorzystania standardowych metod programowania matematycznego do wyznaczania jej rozwiązania optymalnego. Zauważmy, że możliwość praktycznego wyznaczenia rozwiązania optymalnego dotyczy nie tylko skalaryzacji sensu stricte, ale również szeregu innych porządków liniowych. Szczególnie często wykorzystuje się w takim podejściu porządek leksykograficzny. Jako uogólnienie skalaryzacji będziemy rozpatrywać *leksykograficzne regularyzacje skalaryzacji*, gdzie hierarchiczna optymalizacja dodatkowych funkcji skalaryzujących uściśla wybór rozwiązania optymalnego oryginalnej skalaryzacji. Najprostsza leksykograficzna regularyzacja skalaryzacji zadania optymalizacji wielokryterialnej jest dwupoziomowym zadaniem postaci

$$\text{lexmax } \{(s(\mathbf{y}), s'(\mathbf{y})) \ : \quad \mathbf{y} \in A\}$$

gdzie s jest oryginalną funkcją skalaryzującą, a s' dodatkową funkcją regularyzacyjną.

Jeżeli oryginalna funkcja skalaryzująca jest niemalejąca po współrzędnych, a funkcja regularyzacyjna jest ściśle rosnąca po współrzednych, to rozwiązanie optymalne dwupoziomowej leksykograficznej regularyzacji skalaryzacji jest takim rozwiązaniem optymalnym oryginalnej skalaryzacji, które jest jednocześnie rozwiązaniem efektywnym zadania optymalizacji wielokryterialnej. Dla uzasadnienia powyższego stwierdzenia zauważmy, że każde rozwiązanie optymalne dwupoziomowej optymalizacji leksykograficznej jest w szczególności rozwiązaniem optymalnym zdania pierwszego poziomu (jednym z wielu). Jednocześnie przy założonych własnościach funkcji skalaryzujących, dla dowolnego wektora ocen $\mathbf{y}$ dominującego dany osiągalny wektor ocen $\mathbf{y}^o$ prawdziwe są nierówności $s(\mathbf{y}) \geq s(\mathbf{y}^o)$ i $s'(\mathbf{y}) > s'(\mathbf{y}^o)$, czyli $(s(\mathbf{y}), s'(\mathbf{y})) \ >_{lex} \ (s(\mathbf{y}^o), s'(\mathbf{y}^o))$. Tym samym, zdominowany wektor ocen nie reprezentuje rozwiązania optymalnego takiej regularyzacji skalaryzacji.

Wskazywaliśmy wcześniej, że dla wyznaczenia rozwiązania efektywnego zgodnego z maksymalizacją pojedynczej funkcji oceny f_k można rozszerzyć zadanie optymalizacji jednokryterialnej do odpowiedniego zadania leksykograficznego wprowadzając hierarchię ocen określoną permutacją zbioru ocen taką, że k-ta ocena ma najwyższy priorytet (występuje na pierwszym miejscu). Istnieje możliwość prostszej regularyzacji zadania optymalizacji jednokryterialnej za pomocą dwupoziomowego zadania leksykograficznego z funkcją regularyzacyjną określoną jako suma ocen. Suma ocen jest funkcją ściśle rosnącą po współrzędnych, co uzasadnia następujące stwierdzenie.

Każde rozwiązanie optymalne dwupoziomowej leksykograficznej regularyzacji skalaryzacji

$$\text{lexmax } \{(f_k(\mathbf{x}), \sum_{i=1}^{m} f_i(\mathbf{x})) \ : \quad \mathbf{x} \in Q\}$$

jest rozwiązaniem efektywnym zadania optymalizacji wielokryterialnej o największej osiągalnej wartości funkcji oceny f_k.

Koncepcja dwupoziomowej leksykograficznej regularyzacji za pomocą sumy ocen może być wykorzystana do regularyzacji dowolnych skalaryzacji, które nie spełniają warunku ścisłej monotoniczności, a jedynie warunek słabej monotoniczności. W szczególności dotyczy to skalaryzacji maksyminowej, która bezpośrednio nie gwarantuje efektywności swoich rozwiązań optymalnych. Z drugiej jednak strony, w odróżnieniu od skalaryzacji ważonych ocen, każde rozwiązanie efektywne zadania optymalizacji wielokryterialnej jest rozwiązaniem optymalnym zadania skalarazycji maksyminowej z odpowiednio dobranymi liniowymi funkcjami osiągnięcia. Zastosowanie leksykograficznej regularyazacji sumą ocen pozwala zagawarantować efektywność wyznaczanych rozwiązań maksyminowych przy zachowaniu możliwości wyznaczenia każdego rozwiązania efektywnego.

Każde rozwiązanie optymalne dwupoziomowej leksykograficznej regularyzacji skalaryzacji maksyminowej

$$\text{lexmax } \{(\min_{i=1,\dots,m} f_i(\mathbf{x}), \sum_{i=1}^{m} f_i(\mathbf{x})) \ : \quad \mathbf{x} \in Q\}$$

jest rozwiązaniem efektywnym zadania optymalizacji wielokryterialnej.

Warunki słabej monotoniczności skalaryzacji maksyminowej i ścisłej monotoniczności sumy pozostają zachowane przy zastosowaniu dowolnych ściśle rosnących funkcji osiągnięcia. Dlatego prawdziwe jest ogólniejsze stwierdzenie obejmujące regularyzacje maksyminowych skalaryzacji funkcji osiągnięcia.

Dla dowolnych ściśle rosnących funkcji osiągnięcia s_i, każde rozwiązanie optymalne (dwupoziomowego) zadania leksykograficznego

$$\text{lexmax } \{(\min_{i=1,\dots,m} s_i(f_i(\mathbf{x})), \sum_{i=1}^{m} s_i(f_i(\mathbf{x}))) \ : \quad \mathbf{x} \in Q\} \tag{11}$$

jest rozwiązaniem efektywnym zadania optymalizacji wielokryterialnej.

Zauważmy, że każde rozwiązanie optymalne leksykograficznej regularyzacji skalaryzacji jest również rozwiązaniem optymalnym (jednym z wielu) oryginalnej skalaryzacji. W przypadku leksykograficznych regularyzacji maksyminowych otrzymujemy rozwiązania optymalne odpowiedniego zadania maksyminowego. Zatem, dla rozwiązania leksykograficznego zadania (11) prawdziwe są odpowiednie stwierdzenia dotyczące skalaryzacji maksyminowych. Dotyczy to w szczególności możliwości generowania każdego rozwiązania efektywnego.

Rozwiązanie efektywne $\mathbf{x}^o$ zadania optymalizacji wielokryterialnej jest jednoznacznym w przestrzeni ocen rozwiązaniem optymalnym zadania leksykograficznej regularyzacji skalaryzacji maksyminowej (11) z dowolnymi ściśle rosnącymi funkcjami osiągnięcia spełniającymi warunek

$$s_1(y_1^o) = s_2(y_2^o) = \ldots = s_m(y_m^o)$$

gdzie $y_i^o = f_i(\mathbf{x}^o)$.

Optymalizacja leksykograficzna wymaga rozwiązania ciągu zadań o rosnącej liczbie ograniczeń wyrażających optymalność dla zadań wyższego poziomu. W przypadku występowania jedynie dwóch poziomów optymalizacji, zadanie leksykograficznej regularyzacji skalaryzacji może być dobrze aproksymowane przez maksymalizację (analitycznie) regularyzowanej funkcji skalaryzującej

$$\max \{s(\mathbf{y}) + \varepsilon s'(\mathbf{y}) \ : \quad \mathbf{y} \in A\}$$

gdzie ε jest arbitralnie małym dodatnim parametrem. W praktyce parametr ε powinien być możliwie najmniejszy gwarantując jednak zauważalny wpływ składnika regularyzacyjnego na wartość skalaryzacji. Dla porównywalnych wartościach oryginalnej skalaryzacji i funkcji regularyzacyjnej przy obliczeniach numerycznych prowadzonych w pojedynczej precyzji może to być wielkość rzędu 10^{-4}. W przypadku stosowania podwójnej precyzji może to być wielkość rzędu 10^{-6} lub 10^{-7}.

Regularyzowana skalaryzacja zbiega do leksykograficznej regularyzacji przy ε dążącym do zera. Jednocześnie dla dowolnej konkretnej dodatniej wartości ε wynikowa funkcja skalaryzująca jest ścisłe rosnąca po współrzędnych, o ile tylko oryginalna funkcja skalaryzująca jest niemalejąca, a funkcja regularyzacyjna ściśle rosnąca. Tym samym, prawdziwe jest następujące stwierdzenie.

Jeżeli podstawowa funkcja skalaryzująca s jest niemalejąca po współrzędnych a regularyzacyjna funkcja s' jest ściśle rosnąca po współrzędnych, to przy dowolnej dodatniej wartości ε, rozwiązanie optymalne *regularyzowanej skalaryzacji*

$$\max \{s(\mathbf{f}(\mathbf{x})) + \varepsilon s'(\mathbf{f}(\mathbf{x})) \ : \quad \mathbf{x} \in Q\}$$

jest rozwiązaniem efektywnym zadania optymalizacji wielokryterialnej. Zauważmy, że w odróżnieniu od przypadku leksykograficznej regularyzacji skalaryzacji, rozwiązanie optymalne regularyzowanej skalaryzacji nie musi być jednym z rozwiązań optymalnych oryginalnej skalararyzacji.

Wykorzystując sumę ocen jako funkcję regularyzacyjną dla najgorszej oceny otrzymujemy *regularyzowaną skalaryzację maksyminową* postaci

$$\max \{ \min_{i=1,\ldots,m} \ y_i + \varepsilon \sum_{i=1}^{m} y_i \ : \quad \mathbf{y} \in A\}$$

W przypadku większej liczby ocen (dużego m) wartości funkcji regularyzującej nie są tu na ogól porównywalne z wartościami oryginalnej skalaryzacji. Dlatego wartość parametru ε jest tu zwykle ustalana jako iloraz ϱ/m, gdzie ϱ jest arbitralnie małą stałą dostosowaną do arytmetyki.

Warunki słabej monotoniczności skalaryzacji maksyminowej i ścisłej monotoniczności sumy pozostają zachowane przy zastosowaniu dowolnych ściśle rosnących funkcji osiągnięcia. Dlatego prawdziwe jest ogólniejsze stwierdzenie obejmujące regularyzacje maksyminowych skalaryzacji funkcji osiągnięcia.

Dla dowolnych ściśle rosnących funkcji osiągnięcia s_i, każde rozwiązanie optymalne regularyzowanej skalaryzacji maksyminowej

$$\max \{ \min_{i=1,\ldots,m} \ s_i(f_i(\mathbf{x})) + \varepsilon \sum_{i=1}^{m} s_i(f_i(\mathbf{x})) \ : \quad \mathbf{x} \in Q\}$$

jest rozwiązaniem efektywnym zadania optymalizacji wielokryterialnej.

W odróżnieniu od przypadku leksykograficznej regularyzacji skalaryzacji maksyminowej, rozwiązanie optymalne regularyzowanej skalaryzacji maksyminowej nie musi być jednym z rozwiązań optymalnych oryginalnej skalararyzacji. Dlatego, nie stosują się tu odpowiednie stwierdzenia dotyczące możliwości generowania każdego rozwiązania efektywnego przez skalaryzacje maksyminowe. Należy jednak podkreślić, że przy dostatecznie małych wartościach parametru ε, niezdominowane wektory ocen nieosiągalne dla regularyzowanej skalaryzacji maksyminowej są bliskie zdominowania w takim sensie, że mogą być zastąpione osiągalnymi wektorami ocen o minimalnie mniejszej ocenie najgorszej przy znacznie większej sumie wszystkich ocen.

2.7 Metody punktu odniesienia

Metody punktu odniesienia (MPO) łączą prostotę i otwartość sterowania procesem analizy interaktywnej ze ścisłym przestrzeganiem zasady niezdominowania generowanych rozwiązań i zupełnej parametryzacji zbioru niezdominowanego. Używają one poziomów aspiracji jako głównych parametrów sterujących, ale interpretują je zgodnie z zasadami modelu quasi-zadowalającego. Dokładniej, model preferencji reprezentowany przez skalaryzacje używane w metodach punktu odniesienia spełnia następujące dwa postulaty:

P1. Relacja preferencji jest racjonalną relacją preferencji, czyli przestrzegana jest zasada niezdominowania.

P2. Rozwiązanie ze wszystkimi indywidualnymi ocenami y_i równymi odpowiadającym im poziomom aspiracji jest preferowane w stosunku do rozwiązania z przynajmniej jedną indywidualną oceną gorszą (mniejszą) od odpowiedniego poziomu aspiracji.

Metody punktu odniesienia są oparte na regularyzowanej skalaryzacji maksyminowej z funkcjami osiągnięcia uwzględniającymi poziomy aspiracji a_i.

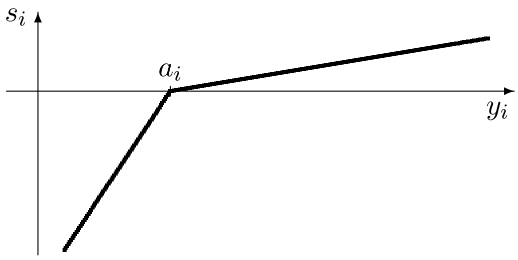
Klasyczna metoda punktu odniesienia polega na maksymalizacji skalaryzującej funkcji osiągnięcia

$$s(\mathbf{y}) = \min_{i=1,\ldots,m} s_i(a_i, y_i) + \varepsilon \sum_{i=1}^{m} s_i(a_i, y_i) \tag{12}$$

z indywidualnymi funkcjami osiągnięcia postaci

$$s_i(a_i, y_i) = \begin{cases} \beta\lambda_i(y_i - a_i), & \text{jeśli} \quad y_i \geq a_i \\ \lambda_i(y_i - a_i), & \text{jeśli} \quad y_i < a_i \end{cases} \tag{13}$$

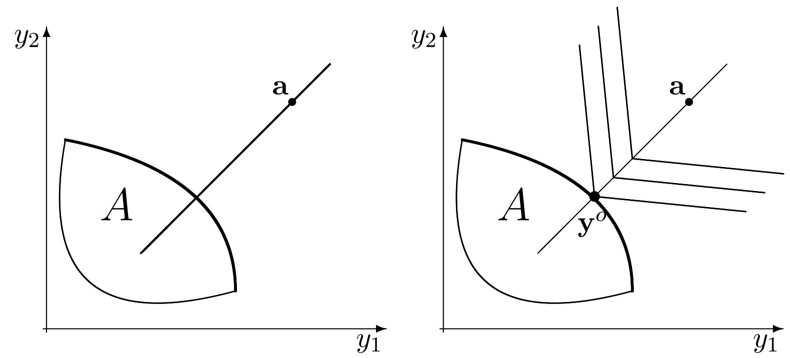
gdzie λ_i są dodatnimi mnożnikami skalującymi, a β małym parametrem dodatnim ($0 < \beta < 1$).



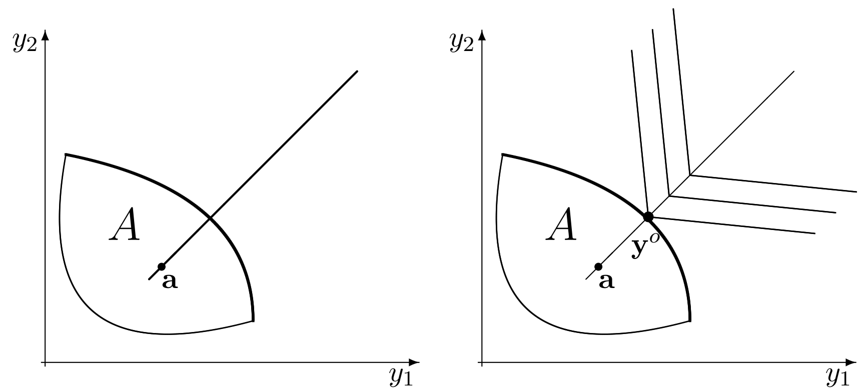
Rys. 4: Indywidualna funkcja osiągnięcia klasycznej wersji MPO

Zauważmy, że indywidualne funkcje osiągnięcia (13) przesuwają początek układu współrzędnych w przestrzeni ocen do wektora poziomów aspiracji. Tym samym, przypisują miarę osiągnięcia 0 wartości oceny równej poziomowi aspiracji, ujemne miary osiągnięcia wartościom oceny poniżej poziomu aspiracji i dodatnie miary wartościom oceny przekraczającym poziom aspiracji. Następnie wszystkie oceny są przeskalowane za pomocą mnożników λ_i dla znormalizowania ich zakresów zmienności. Dalej, wartości dodatnie wyrażające znormalizowane nadmiary wartości ocen ponad poziomy aspiracji są pomniejszane przez czynnik β. Najczęściej przyjmuje się β rzędu 10^{-3}. W konsekwencji przyrost wartości oceny ponad poziomem aspiracji powoduje znacznie mniejszy przyrost wartości funkcji osiągnięcia niż w przypadku nieosiągania poziomu aspiracji.

Maksymalizacja skalaryzującej funkcji (12) na zbiorze ocen osiągalnych A wyznacza niezdominowany wektor ocen $\mathbf{y}$ i generujące go rozwiązanie efektywne $\mathbf{x}$. Wyznaczone rozwiązanie efektywne zależy od wartości dwóch grup parametrów: poziomów aspiracji a_i i czynników skalujących λ_i. Czynniki skalujące określają kierunek przechodzącej przez punkt odniesienia $\mathbf{a}$ prostej równych indywidualnych osiągnięć, wzdłuż której dokonuje się maksymalizacja regularyzowanej skalaryzacji maksyminowej. Ilustruje to rysunek 5.

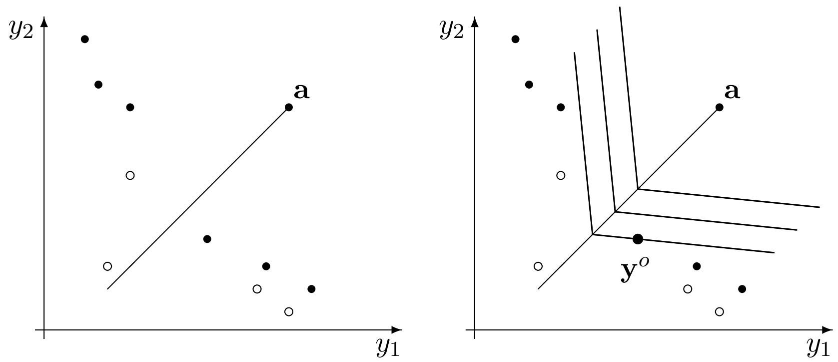


Rys. 5: Klasyczna MPO – przypadek nieosiągalnego wektora aspiracji



Rys. 6: Klasyczna MPO – przypadek osiągalnego wektora aspiracji

Metoda punktu odniesienia nie traktuje wektora aspiracji jako bezwględnego celu a jedynie jako punkt odniesienia. Dlatego nawet w przypadku osiągalnego wektora aspiracji MPO wyznacza niezdominowany wektor ocen. Ilustruje to rysunek 6.



Rys. 7: Klasyczna MPO w przypadku problemu dyskretnego

Jak pokazuje rysunek 7, w przypadku dyskretnych lub ogólnie niewypukłych zadań optymalizacji wielokryterialnej wektor niezdominowany wyznaczany przez MPO nie musi leżeć na linii równych indywidualnych osiągnięć.

W implemetacjach metody punktu odniesienia wartości czynników skalujących λ_i ustala się zazwyczaj automatycznie na podstawie wstępnej analizy problemu, na przykład odwrotności różnic między współrzędnymi wektorów utopii i nadiru $\lambda_i = 1/(y_i^u - y_i^n)$. Natomiast poziomy aspiracji a_i pozostawia się jako parametry sterujące procesem analizy interaktywnej. Parametr ε służy jedynie do wprowadzenia składnika regularyzacyjnego gwarantującego efektywność rozwiązania w przypadku niejednoznaczności maksimum pierwszego składnika funkcji $s(\mathbf{y})$. Zgodnie z zasadami regularyzowanej skalaryzacji maksyminowej wartość parametru regularyzacji ε jest tu zwykle ustalana jako iloraz ϱ/m, gdzie ϱ jest arbitralnie małą stałą, na przykład $\varrho = 10^{-4}$.

Przedziałami liniowe indywidualne funkcje osiągnięcia (13) są rosnące i wklęsłe. Dzięki temu pozwalają one na bardzo prostą implementację maksymalizacji skalaryzującej funkcji osiągnięcia MPO w postaci rozszerzenia programowania liniowego oryginalnego zadania optymalizacji wielokryterialnej:

$$\begin{array}{lll} \max & v + \varepsilon \sum_{i=1}^{m} z_i & \\ & v \leq z_i & \text{for } i = 1, \ldots, m \\ & z_i \leq \beta\lambda_i(y_i - a_i) & \text{for } i = 1, \ldots, m \\ & z_i \leq \lambda_i(y_i - a_i) & \text{for } i = 1, \ldots, m \\ & \mathbf{y} \in A & \end{array}$$

gdzie zmienne z_i wyrażają wartości indywidualnych funkcji osiągnięcia, a zmienna v wyraża minimum z tych wartości.

Zatem klasyczna MPO zapewnia efektywność obliczeniową skalaryzacji nie wprowadzając do modelu istotnych utrudnień obliczeniowych. Dla zadań wielokryterialnego programowania liniowego odpowiednie zadanie skalaryzacji jest standardowym zadaniem programowania liniowego z niewielką liczbą (proporcjonalną do liczby funkcji oceny) dodatkowych zmiennych i nierówności. Co więcej, model optymalizacyjny skalaryzacji MPO wykorzystuje automatycznie oryginalny model zadania wielokryterialnego bez konieczności jego analizy i przebudowy, a jedynie rozszerza go o dodatkowe zmienne i zależności definiujące skalaryzację.

Ogólna metoda punktu odniesienia może być rozpatrywana w postaci leksykograficznej. Leksykograficzna (ogólna) metoda punktu odniesienia polega na maksymalizacji leksykograficznej regularyzacji skalaryzacji maksyminowej

$$\operatorname{lexmax} \{(\min_{i=1,\ldots,m} s_i(a_i, y_i), \sum_{i=1}^{m} s_i(a_i, y_i)) \ : \quad \mathbf{y} \in A\} \tag{14}$$

z indywidualnymi funkcjami osiągnięcia $s_i(a_i, y_i)$ ściśle rosnącymi względem y_i i przyjmującymi ustaloną wartość dla wartości ocen równych poziomom aspiracji

$$s_1(a_1, a_1) = s_2(a_2, a_2) = \cdots = s_m(a_m, a_m) \tag{15}$$

Z własności leksykograficznej regularyzacji skalaryzacji maksyminowej (6.5) wynika, że dla dowolnych indywidualnych funkcji osiągnięcia, ściśle rosnących względem y_i, rozwiązanie optymalne zadania (14) jest niezdominowanym wektorem ocen. Ponadto, dla dowolnych funkcji $s_i(a_i, y_i)$ ściśle rosnących względem y_i i spełniających warunek (15), relacja preferencji definiowana przez spełnia warunek interpretacji poziomów aspiracji zgodnie z modelem quasi-zadowalającym. Faktycznie, jeżeli wektor ocen $\mathbf{y}$ nie osiąga co najmniej jednego poziomów aspiracji, powiedzmy $y_k < a_k$, to

$$\min_{i=1,\ldots,m} s_i(a_i, y_i) \leq s_k(a_k, y_k) < s_k(a_k, a_k) = \min_{i=1,\ldots,m} s_i(a_i, a_i)$$

Zatem

$$(\min_{i=1,\ldots,m} s_i(a_i, y_i), \sum_{i=1}^{m} s_i(a_i, y_i)) \ <_{lex} \ (\min_{i=1,\ldots,m} s_i(a_i, a_i), \sum_{i=1}^{m} s_i(a_i, a_i))$$

co oznacza, że w leksykograficznej MPO wektor poziomów aspiracji $\mathbf{a}$ jest ściśle preferowany w stosunku do wektora $\mathbf{y}$. Tym samym, model preferencji leksykograficznej metody punktu odniesienia spełnia postulaty P1 i P2.

Ponadto, zgodnie z twierdzeniem 6.3, dowolny niezdominowany wektor ocen $\mathbf{y}^o \in A$ jest rozwiązaniem optymalnym zadania (14) dla wektora aspiracji $\mathbf{a} = \mathbf{y}^o$. Zatem dla dowolnego niezdominowanego wektora ocen istnieje wektor poziomów aspiracji, przy kórym ten wektor ocen jest rozwiązaniem optymalnym odpowiedniego zadania leksykograficznej MPO. To oznacza, że leksykograficzna metoda punktu odniesienia spełnia zasadę zupełnej parametryzacji zbioru niezdominowanego za pomocą poziomów aspiracji.

Indywidualne funkcje osiągnięcia klasycznej MPO (13) są przedziałami liniowymi funkcjami rosnącymi (dzięki dodatnim wartościom λ_i) i przyjmują wartość 0 dla ocen osiągających poziomy aspiracji (tzn. $s_i(a_i, a_i) = 0$). Spełniają one zatem formalne wymagania ogólnej metody punktu osiągnięcia. Dlatego prawdziwe jest następujące stwierdzenie. Leksykograficzna metoda punktu odniesienia (14) z przedziałami liniowymi indywidualnymi funkcjami osiągnięcia (13) spełnia zasadę niezdominowania rozwiązań i efektywności obliczeniowej. Jednocześnie spełniona jest zasada zupełnej parametryzacji zbioru niezdominowanego za pomocą poziomów aspiracji, które gwarantują intuicyjność i sterowalność procesu analizy interaktywnej.

Klasyczna MPO stosuje uproszczoną jednopoziomową skalaryzującą funkcję osiągnięcia (12), która jako regularyzowana skalaryzacja maksyminowa zachowuje wszystkie podstawowe własności leksykograficznej MPO z jednym tylko ograniczeniem. Zupełność parametryzacji za pomocą poziomów aspiracji jest spełniona tylko asymptotycznie przy ε dążącym do zera.

Zauważmy, że wymagania ogólnej metody punktu osiągnięcia spełniają uproszczone liniowe funkcje osiągnięcia postaci

$$s_i(a_i, y_i) = \lambda_i(y_i - a_i) \quad \text{dla } i = 1, 2, \ldots, m$$

z jednakowym traktowaniem niedoborów do poziomów aspiracji i nadwyżek ponad poziomy aspiracji. Faktycznie, takie indywidualne funkcje osiągnięcia również zapewnią wszystkie zasadnicze własności leksykograficznej MPO. Załamanie wykresu indywidualnych funkcji osiągnięcia (13) w poziomie aspiracji nie ma żadnego znaczenia z punktu widzenia maksymalizacji skalaryzacji maksyminowej. Umożliwia ono jednak właściwą reprezentację poziomów aspiracji w agregacji ważonej stanowiącej składnik regularyzacyjny. Dlatego nie stosuje się liniowych funkcji osiągnięcia tylko przedziałami liniowe funkcje (13).

2.8 Przedziałowa metoda punktu odniesienia

W klasycznej metodzie punktu odniesienia podstawowymi parametrami sterującymi są poziomy aspiracji, ale są w niej też współczynniki skalujące dodatkowo określające kierunek poszukiwań rozwiązania satysfakcjonującego. Ze względu na maksyminowy charakter skalaryzującej funkcji osiągnięcia współczynniki skalujące nie mają tu charakteru wag kompensacyjnych. Tym niemniej, podobnie jak wagi są to parametry znacznie mniej intuicyjne od wartości ocen i ich specjalny dobór (odmienny od automatycznego skalowania różnicą między utopią i nadirem) może nastręczać trudności. Zamiast operować czynnikami skalującymi można wprowadzić do metody dodatkowe punkty odniesienia, które jako wyrażające wartości ocen są bardziej intuicyjne i łatwiejsze w doborze. Koncepcja ta leży u podstaw przedziałowej (dwupunktowej) metody punktu odniesienia używającej jako parametrów sterujących oprócz poziomów aspiracji także tzw. *poziomów rezerwacji* r_i ($r_i < a_i$, $i = 1, 2, \ldots, m$) wyrażających wymagane minimalne wartości ocen. Wprowadzenie wymaganych wartości ocen w postaci bezwzględnych ograniczeń mogłoby doprowadzić do modelu sprzecznego. Określenie wymaganych wartości ocen w terminach poziomów rezerwacji wyraża *miękkie* ograniczenia na poszczególne oceny. Odpowiada to wprowadzeniu do modelu preferencji dodatkowego postulatu

P2a. Rozwiązanie ze wszystkimi indywidualnymi ocenami y_i równymi odpowiadającym im poziomom rezerwacji jest preferowane w stosunku do rozwiązania z przynajmniej jedną indywidualną oceną mniejszą od odpowiedniego poziomu rezerwacji.

Postulat P2a wyraża, że decydent woli oceny osiągające wszystkie poziomy rezerwacji od tych, które nie osiągają jednego lub więcej poziomów rezerwacji. Postulat ten, analogicznie jak postulat P2, może być zapisany w postaci warunku

$$(\mathbf{y} \neq \mathbf{r} \quad \text{i} \quad \mathbf{y} \ngeq \mathbf{r}) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{r} \succ \mathbf{y}$$

który dopuszcza jako lepsze od wektora rezerwacji tylko te wektory, gdzie wszystkie oceny osiągnęły poziomy rezerwacji a niektóre przekraczają.

Odpowiednikiem klasycznej metody punktu odniesienia jest podstawowa metoda przedziałowa oparta na regularyzowanej skalaryzacji maksyminowej z funkcjami osiągnięcia uwzględniającymi poziomy aspiracji a_i i poziomy rezerwacji r_i.

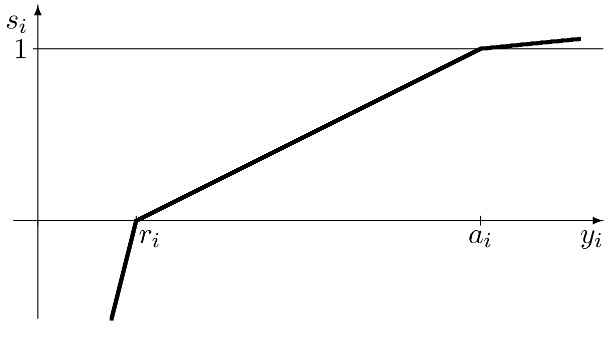
Podstawowa przedziałowa metoda punktu odniesienia (PMPO) polega na maksymalizacji skalaryzującej funkcji osiągnięcia

$$s(\mathbf{y}) = \min_{i=1,\dots,m} s_i(a_i, r_i, y_i) + \varepsilon \sum_{i=1}^{m} s_i(a_i, r_i, y_i) \tag{16}$$

z indywidualnymi funkcjami osiągnięcia postaci

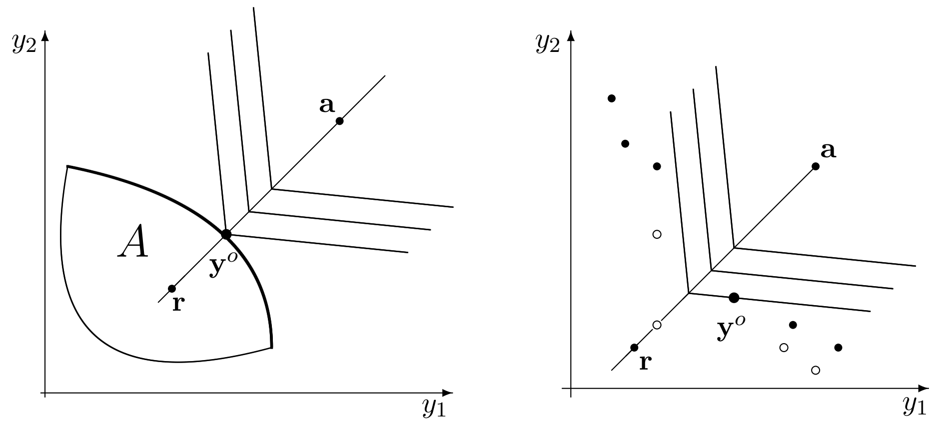
$$s_i(a_i, r_i, y_i) = \begin{cases} \gamma(y_i - r_i)/(a_i - r_i), & \text{jeśli} \quad y_i \leq r_i \\ (y_i - r_i)/(a_i - r_i), & \text{jeśli} \quad r_i < y_i \leq a_i \\ \beta(y_i - a_i)/(a_i - r_i) + 1, & \text{jeśli} \quad y_i > a_i \end{cases} \tag{17}$$

gdzie β jest małym a γ dużym parametrem dodatnim ($0 < \beta < 1 < \gamma$).



Rys. 8: Indywidualna funkcja osiągnięcia Przedziałowej MPO

Indywidualne funkcje osiągnięcia mierzą odchylenie wartości oceny y_i od oczekiwań decydenta wyrażonych poziomem aspiracji a_i i poziomem rezerwacji r_i. Funkcje (17) są przedziałami liniowymi funkcjami rosnącymi przypisującymi wartość 1 dla oceny równej poziomowi aspiracji $y_i = a_i$ i wartość 0 dla oceny równej poziomowi rezerwacji $y_i = r_i$. Wszystkie oceny są przeskalowane za pomocą mnożników $1/(a_i - r_i)$ dla znormalizowania ich zmienności w zakresie między poziomem rezerwacji a poziomem aspiracji. Dalej, wartości wyrażające znormalizowane nadmiary wartości ocen ponad poziomy aspiracji są pomniejszane przez czynnik β, a wartości wyrażające niedobory do poziomów rezerwacji są powiększane z czynnikiem γ. Najczęściej przyjmuje się β rzędu 10^{-3} i γ rzędu 10^3. W konsekwencji przyrost wartości oceny ponad poziomem aspiracji powoduje znacznie mniejszy przyrost wartości funkcji osiągnięcia niż w przypadku nieosiągania poziomu aspiracji, a przyrost wartości oceny pomiędzy poziomem rezerwacji i aspiracji powoduje znacznie mniejszy przyrost wartości funkcji osiągnięcia niż w przypadku nieosiągania poziomu rezerwacji.



Rys. 9: Przedziałowa MPO w przypadku problemu ciągłego i dyskretnego

Maksymalizacja skalaryzującej funkcji (16) na zbiorze ocen osiągalnych A wyznacza niezdominowany wektor ocen $\mathbf{y}$ i generujące go rozwiązanie efektywne $\mathbf{x}$. Wyznaczone rozwiązanie efektywne zależy od wyboru dwóch punktów odniesienia określonych odpowiednio przez poziomy aspiracji a_i i poziomy rezerwacji r_i. Prosta przechodząca przez oba punkty odniesienia jest prostą równych indywidualnych osiągnięć, wzdłuż której dokonuje się maksymalizacja regularyzowanej skalaryzacji maksyminowej. Ilustruje to rysunek 9. W przypadku dyskretnych lub ogólnie niewypukłych zadań optymalizacji wielokryterialnej wektor niezdominowany wyznaczany przez PMPO nie musi leżeć na prostej określonej przez punkty $\mathbf{a}$ i $\mathbf{r}$, nawet gdy pewne osiągalne wektory ocen leżą na tej prostej.

Stosowana w metodzie punktu odniesienia maksymalizacja regularyzowanej skalaryzacji maksyminowej funkcji osiągnięcia gwarantuje wyznaczenie niezdominowanych wektorów ocen. Ponadto dzięki wklęsłości, funkcje osiągnięcia mogą być wyrażone w postaci

$$s_i(a_i, r_i, y_i) = \min\left\{\gamma\frac{y_i - r_i}{a_i - r_i},\ \frac{y_i - r_i}{a_i - r_i},\ \beta\frac{y_i - a_i}{a_i - r_i} + 1\right\}$$

i maksymalizacja całej skalaryzującej funkcji osiągnięcia przedziałowej MPO może być wprowadzona do oryginalnego modelu w postaci rozszerzenia programowania liniowego

$$\begin{array}{lll}
\max & v + \varepsilon \sum_{i=1}^{m} z_i & \\
 & v \le z_i & \text{for } i = 1, \ldots, m \\
 & z_i \le \gamma(y_i - r_i)/(a_i - r_i) & \text{for } i = 1, \ldots, m \\
 & z_i \le (y_i - r_i)/(a_i - r_i) & \text{for } i = 1, \ldots, m \\
 & z_i \le \beta(y_i - a_i)/(a_i - r_i) + 1 & \text{for } i = 1, \ldots, m \\
 & \mathbf{y} \in A &
\end{array}$$

gdzie zmienne z_i wyrażają wartości indywidualnych funkcji osiągnięcia, a zmienna v wyraża minimum z tych wartości.

Zatem przedziałowa MPO zapewnia efektywność obliczeniową skalaryzacji nie wprowadzając do modelu istotnych utrudnień obliczeniowych. Model optymalizacyjny skalaryzacji PMPO wykorzystuje automatycznie oryginalny model zadania wielokryterialnego bez konieczności jego analizy i przebudowy, a jedynie rozszerza go o niewielką liczbę dodatkowych zmiennych i zależności liniowych definiujących skalaryzację.

Maksymalizacja skalaryzującej funkcji osiągnięcia (16) po $\mathbf{y} \in A$ może być rozpatrywana jako implementacja dwupoziomowej optymalizacji leksykograficznej. Faktycznie przedziałowa metoda punktu odniesienia może być rozpatrywana w postaci leksykograficznej. Leksykograficzna przedziałowa metoda punktu odniesienia polega na maksymalizacji leksykograficznej regularyzacji skalaryzacji maksyminowej

$$\text{lexmax}\ \{(\min_{i=1,\ldots,m} s_i(a_i, r_i, y_i), \sum_{i=1}^{m} s_i(a_i, r_i, y_i)) \ : \quad \mathbf{y} \in A\} \tag{18}$$

z indywidualnymi funkcjami osiągnięcia $s_i(a_i, r_i, y_i)$ ściśle rosnącymi względem y_i i przyjmującymi ustalone wartości dla ocen równych poziomom aspiracji i odpowiednio poziomom rezerwacji

$$s_1(a_1, r_1, r_1) = \cdots = s_m(a_m, r_m, r_m) < s_1(a_1, r_1, a_1) = \cdots = s_m(a_m, r_m, a_m) \tag{19}$$

Z własności leksykograficznej regularyzacji skalaryzacji maksyminowej (6.5) wynika, że dla dowolnych indywidualnych funkcji osiągnięcia, ściśle rosnących względem y_i, rozwiązanie optymalne zadania (18) jest niezdominowanym wektorem ocen. Ponadto, dla dowolnych funkcji $s_i(a_i, r_i, y_i)$ ściśle rosnących względem y_i i spełniających warunek (19), relacja preferencji definiowana przez leksykograficzną maksymalizację (18) spełnia warunki interpretacji poziomów aspiracji i poziomów rezerwacji zgodnie z modelem quasi-zadowalającym. To znaczy, model preferencji leksykograficznej metody punktu odniesienia spełnia postulaty P1, P2 i P2a.

Ponadto, zgodnie z twierdzeniem 6.3, dowolny niezdominowany wektor ocen $\mathbf{y}^o \in A$ jest rozwiązaniem optymalnym zadania (18) w przypadku przyjęcia tego wektora jako aspiracji $\mathbf{a} = \mathbf{y}^o$ lub rezerwacji $\mathbf{r} = \mathbf{y}^o$. Zatem dla dowolnego niezdominowanego wektora ocen istnieją wektory poziomów aspiracji i rezerwacji, przy kórych ten wektor ocen jest rozwiązaniem optymalnym odpowiedniego zadania leksykograficznej PMPO. To oznacza, że leksykograficzna przedziałowa metoda punktu odniesienia spełnia zasadę zupełnej parametryzacji zbioru niezdominowanego za pomocą poziomów aspiracji lub rezerwacji.

Indywidualne funkcje osiągnięcia PMPO (17) są przedziałami liniowymi funkcjami rosnącymi i przyjmują wartość 0 dla ocen osiągających poziomy rezerwacji (tzn. $s_i(a_i, r_i, r_i) = 0$) oraz wartość 1 dla ocen osiągających poziomy aspiracji (tzn. $s_i(a_i, r_i, a_i) = 1$). Spełniają one zatem formalne wymagania leksykograficznej metody przedziałowej. Dlatego prawdziwe jest następujące stwierdzenie.

Leksykograficzna przedziałowa metoda punktu odniesienia (18) z przedziałami liniowymi indywidualnymi funkcjami osiągnięcia (17) spełnia zasadę niezdominowania rozwiązań i efektywności obliczeniowej. Jednocześnie spełniona jest zasada zupełnej parametryzacji zbioru niezdominowanego za pomocą poziomów aspiracji lub rezerwacji, które gwarantują intuicyjność i sterowalność procesu analizy interaktywnej.

Podstawowa PMPO stosuje uproszczoną jednopoziomową skalaryzującą funkcję osiągnięcia (16), która jako regularyzowana skalaryzacja maksyminowa zachowuje wszystkie podstawowe własności leksykograficznej PMPO z jednym tylko ograniczeniem. Zupełność parametryzacji za pomocą poziomów aspiracji jest spełniona tylko asymptotycznie przy ε dążącym do zera.

3 Model aukcyjny oparty na MPO

3.1 Wielokryterialne koncepcje w modelach aukcyjnych

Aukcja jest definiowana zbiorem predefiniowanych reguł określających jak oferty będą zgłaszane oraz jak zwycięzca aukcji i płatność (cena) będą wyznaczone na podstawie ofert [37]. Na podstawie ofert zgłaszanych przez uczestników rynku określana jest alokacja zasobu i ceny. W transakcjach elektronicznego handlu aukcje są prowadzone przez programowe agenty, które negocjują w imieniu kupujących i sprzedających [2, 4, 10]. Mogą być realizowane różne typy aukcji (protokołów aukcji): aukcja angielska, aukcja pierwszej ceny, aukcja holenderska, aukcja Vickreya i inne [15]. Aukcje (przetargi) zamówień (w szczególności zamówień publicznych) są tzw. aukcjami odwrotnymi. Nazwa dotyczy odwrócenia typowych roli kupujących i sprzedających. W aukcji prostej kupujący konkurują aby otrzymać pewne dobro lub usługę, w rezultacie tej konkurencji cena rośnie podczas aukcji. W aukcji odwrotnej sprzedawcy (dostawcy) konkurują aby zaopatrzyć kupującego w swoje dobra lub usługi. Jako wynik takiej konkurencji, cena zwykle spada podczas aukcji. Aukcja odwrotna jest strategią używaną do realizacja zaopatrzenia przez różne firmy, a w przypadku zamówień publicznych w zasadzie wymaganą w postaci jednokrokowej (przetargu).

Kluczowym wyzwaniem dla systemów wyboru zamówień jest pokonanie ograniczenia standardowej aukcji/przetargu do pojedynczego atrybutu reprezentującego zwykle koszt. W rezultacie wieloatrybutowe aukcje odwrotne stały się przedmiotem intensywnych badań. Aukcje wieloatrybutowe pozwalają na negocjacje w oparciu o wiele atrybutów nie ograniczając się do ceny. Na przykład mogą to być warunki dostawy. gwarancje lub po prostu jakość towaru albo reputacja dostawcy [30]. Zwykle kupujący ujawniają swoje preferencje na kupowane towary/usługi a sprzedający wykorzystują tą informację konkurując na poziomie wielu atrybutów. Aukcje wieloatrybutowe wymagają określenia szeregu kluczowych składowych procesu [4]: model preferencji pozwający kupującemu wyrazić swoje preferencje, model agregacji wielokryterialnej pozwający kupującemy wybrać najlepszą ofertę. Preferencje kupującego są wyrażane przez zdefiniowanie zbioru atrybutów, ich dziedzin i kryteriów, które są funkcjami przypisującymi oceny liczbowe wszystkicm możliwym wartościom poszczególnych atrybutów. Większość wielokryterialnych modeli agregacji wykorzystywanych w wieloatrybutowych aukcjach bazuje na agregacji ważonej sumy [5, 6, 17, 31]. Ta najprostsza agregacja ma jedna wiele wad wskazywanych wcześniej. Z punktu widzenia realizacji aukcji kluczowym problemem jest jej pełna kompensacyjność pozwająca bardzo zły wynik danego atrybutu w ofercie w pełni zrekompensować dobrymi wartościami innych atrybutów. Ponadto, jak wskazywane we wcześniej pewne niezdominowane oferty nie mogą być nigdy najlepszymi w sensie agregacji ważonej, a to jest poważną wadą procesu aukcyjnego, jako że oznacza odrzucanie pewnych ofert jedynie z przyczyn technicznych. W celu pokonania tej wady Bellosta et al. [3] zaproponowali użycie modelu wielokryterialnego opartego na metodzie punktu odniesienia (MPO). Zostały zaproponowany kompletny mechanizm aukcji odwrotnej oparty na modelu MPO, gdzie kupujący specyfikuje wymagane wartości poszczególnych atrybutów.

W każdej rundzie aukcji odwrotnej, kupujący zbiera oferty, wybiera najlepszą ofertę jako punkt odniesienia dla następnej rundy i formułuje odpowiednią kontrpropozycję. Kontrpropozycja jest oparta na zasadzie przebijania ofert, co oznacza konieczność przebicia najlepszej oferty z poprzedniej rundy przez oferty dopuszczane w kolejnej rundzie. W standardowym przypadku aukcji jednoatrybutowej (cena), ta zasada może być prosto implementowana przez komunikowanie sprzedającym najlepszej oferty (ceny) z poprzedniej rundy poprawionej o minimalną różnicę Δ. Sprzedający są w tedy proszeni o przesyłanie nowych ofert co najmniej tak samo dobrych jak komunikowana wartość. Ten sam schemat może być stosowany do aukcji wieloatrybutowych z modelem preferencji określonym funkcją skalaryzującą, wymaga to jednak ujawnienia sprzedającym funkcji skalaryzującej czyli dokładnych preferencji kupującego. Jak pokazano w [3] mechanizm aukcji oparty na MPO pozwala spełniać zasadę przebijania ofert bez ujawniania pełnego modelu preferencji kupującego. Jest to osiągane przez określanie poziomów rezerwacji dla poszczególnych atrybutów na poziomie najlepszej oferty z odpowiednimi poprawkami Δ i komunikowanie sprzedającym jako minimalnych wymagań.

3.2 WOWA rozszerzenie aukcji MPO

Niech $\Theta(a_1,\dots,a_m) = (\theta_1(\mathbf{a}), \theta_2(\mathbf{a}),\dots,\theta_m(\mathbf{a}))$ oznacza wektor otrzymany z $\mathbf{a}$ w wyniku posortowania jego współrzędnych od najgorszej do najlepszej (w niemalejącym porządku). To znaczy, istnieje permutacja τ taka, że $\theta_i(\mathbf{a}) = a_{\tau(i)}$ dla wszystkich i oraz $\theta_1(\mathbf{a}) \geq \theta_2(\mathbf{a}) \geq \dots \geq \theta_m(\mathbf{a})$. Standardowa maksyminimalizacja polega na maksymalizacji $\theta_m(\mathbf{a})$ ignorując wartości $\theta_i(\mathbf{a})$ dla $i \leq m-1$. Dla uwzględnienia pozostałych wartości rozważa się ważoną kombinację, co prowadzi do tzw. uporządkowanych średnich ważonych (Ordered Weighted Averaging – OWA) [38]. W OWA wagi są przypisane do konkretnych pozycji uporządkowane wektora osiągnięcia a nie do poszczeólnych funkcji osiągnięcia (atrybutów). Z agregacją OWA otrzymuje się następujący model metody MPO:

$$\max\{\sum_{i=1}^{m} w_i\theta_i(\mathbf{a}) \; : \; a_i = s_i(f_i(\mathbf{x})) \; \forall \; i, \; \mathbf{x} \in Q \; \} \tag{20}$$

gdzie $w_1 < w_2 < \dots < w_m$ dodatnie ściśle rosnące wagi. Standard model MPO ze skalaryzującą funkcją (16) może być wyrażona w jako OWA MPO model (20) z wagami $w_1 = \dots = w_{m-1} = \varepsilon/m$ and $w_m = 1 + \varepsilon/m$ czyli ściśle rosnącymi w przypadku $m = 2$. Dla $m > 2$ standardowa MPO pomija różnice w ważeniu największej wartości osiągnięcia, drugiej największej itd. ($w_1 = \dots = w_{m-1} = \varepsilon/m$). Model OWA MPO (20) różnicować te wagi za pomocą rosnących ciągów (np. geometrycznych).

OWA MPO model umożliwia wprowadzenie do MPO współczynników ważności poszczególnych atrybutów przez reskalowanie odpowiednio ich miar w rozkładzie osiągnięć zgodnie z definicją tzw. skalowanych OWA (Weighted OWA – WOWA) [33]. Niech $\mathbf{w} = (w_1,\dots,w_m)$ bedzie wektorem preferecyjnych (OWA) wag i niech $\mathbf{p} = (p_1,\dots,p_m)$ oznacza vektor współczynników ważności ($p_i \geq 0$ dla $i = 1,2,\dots,m$ i $\sum_{i=1}^{m} p_i = 1$). WOWA aggregacja osiągnięć $\mathbf{a} = (a_1,\dots,a_m)$ jest zdefiniowana jako:

$$A_{\mathbf{w},\mathbf{p}}(\mathbf{a}) = \sum_{i=1}^{m} \omega_i\theta_i(\mathbf{a}), \qquad \omega_i = w^*(\sum_{k\leq i} p_{\tau(k)}) - w^*(\sum_{k<i} p_{\tau(k)}) \tag{21}$$

gdzie w^* jest rosnącą funkcją interpolującą punkty $(\frac{i}{m}, \sum_{k\leq i} w_k)$ razem z (0.0), a τ oznacza permutację porządkującą wektora $\mathbf{a}$ (tzn. $a_{\tau(i)} = \theta_i(\mathbf{a})$). Agregacja WOWA obejmuje jako szczególny przypadek ($w_i = 1/m$ dla $i = 1,2,\dots,m$) standardową średnią ważoną z wagami p_i. Funkcja w^* może być zdefiniowana przez odpowiednią funkcję generującą

$$g(\xi) = m w_i \quad \text{for } (i-1)/m < \xi \leq i/m, \quad i = 1,2,\dots,m \tag{22}$$

wzorem $w^*(\alpha) = \int_0^\alpha g(\xi)\, d\xi$.

Wprowadzenie węzłów $\alpha_i = \sum_{k\leq i} p_{\tau(k)}$ and $\alpha_0 = 0$ pozwala wyrazić

$$\omega_i = \int_0^{\alpha_i} g(\xi)\, d\xi - \int_0^{\alpha_{i-1}} g(\xi)\, d\xi = \int_{\alpha_{i-1}}^{\alpha_i} g(\xi)\, d\xi$$

Dlatego, agregacja WOWA być wyrażona z prostszą formułą gdzie wagi preferencyjne w_i są stosowane do odpowiednich średnich kwantylowych zgodnie z rozkładem defiowanym przez współczynniki ważności p_i [29]:

$$A_{\mathbf{w},\mathbf{p}}(\mathbf{a}) = \sum_{i=1}^{m} w_i m \int_{\frac{i-1}{m}}^{\frac{i}{m}} F_{\mathbf{a}}^{(-1)}(\xi)\ d\xi \tag{23}$$

gdzie $\overline{F}_{\mathbf{a}}^{(-1)}$ jest funkcją schodkową $\overline{F}_{\mathbf{a}}^{(-1)}(\xi) = \theta_i(\mathbf{a})$ for $\beta_{i-1} < \xi \leq \beta_i$. Matematycznie to może być sformalizowane następująco. Najpierw, wprowadzana jest dystrybuanta (cdf) $F_{\mathbf{a}}(d) = \sum_{i=1}^{m} p_i\delta_i(d)$, gdzie $\delta_i(d) = 1$ jeśli $a_i \leq d$ i 0 w przeciwnym przypadku. Następnie, wprowadza się funkcję kwantylową $F_{\mathbf{a}}^{(-1)} = \inf\ \{\eta : F_{\mathbf{a}}(\eta) \geq \xi\}$ for $0 < \xi \leq 1$ jako odwrotność $F_{\mathbf{a}}$, tzn., $F_{\mathbf{a}}^{(-1)}(\xi) = \inf\ \{\eta : F_{\mathbf{a}}(\eta) \geq \xi\}$ for $0 < \xi \leq 1$, i ostatecznie $\overline{F}_{\mathbf{a}}^{(-1)}(\xi) = F_{\mathbf{a}}^{(-1)}(1-\xi)$.

Finalnie otrzymuje się następujący model [25] dla WOWA MPO z przedzia"mi liniowymi funkcjami osiągnięcia (17):

$$\begin{array}{lll} \max \sum_{k=1}^{m} w'_k z_k \quad \text{s.t.} & z_k = kt_k - m\sum_{i=1}^{m} p_i d_{ik} & \forall\ k \\ & \mathbf{x} \in Q,\ y_i = f_i(\mathbf{x}) & \forall\ i \\ & a_i \geq t_k - d_{ik},\ d_{ik} \geq 0 & \forall\ i,k \\ & a_i \leq \gamma(y_i - r_i^r)/(r_i^a - r_i^r) & \forall\ i \\ & a_i \leq (y_i - r_i^r)/(r_i^a - r_i^r) & \forall\ i \\ & a_i \leq \alpha(y_i - r_i^a)/(r_i^a - r_i^r) + 1 & \forall\ i \end{array} \tag{24}$$

Umożliwia to implemetację WOWA MPO za pomocą programowania liniowego. Jednakże stosując WOWA MPO do wyznaczania najlepszej oferty możliwe jest odwołanie do bezpośredniego wzoru (21) z predefiniowaną przedziałami liniową funkcją w^*.

Agregacja WOWA z dodatnimi wagami jest ściśle rosnąca [25]. Dlatego, podobnie do aukcji opartej nastandardowej MPO [3], aukcja oparta na WOWA MPO spełnia zasadę przebijania ofert bez ujawniania preferencji kupującego.

Bibliografia

[1] Bapna R., Goes P., Gupta A.: A theoretical and empirical investigation of multi-item on-line auctions. Information Technology and Management **1** (2000) 1–23.

[2] Bapna R., Goes P., Gupta A.: Insights and analyses of on-line auctions. Communications ACM **44** (2001) 43–50.

[3] Bellosta M.-J., Brigui I., Kornman S., Vanderpooten D.: A multi-criteria model for electronic auctions. ACM Symposium on Applied Computing (SAC 2004), 2004, 759–765.

[4] Bellosta M.-J., Kornman S., Vanderpooten D.: An Agent-Based Mechanism for Autonomous Multiple Criteria Auctions. Proceedings of the IEEE/WIC/ACM International Conference on Intelligent Agent Technology (IAT'06), 2006, 587–594.

[5] Bichler M.: An experimental analysis of multi-attribute auctions. Decision Support Systems **29** (2000) 249–268.

[6] Bichler, M., Kalagnanam, J.: Configurable offers and winner determination in multi-attribute auctions. Eur. J. Opnl. Res. **160** (2005) 380–394.

[7] Chandrashekar T.S., Narahari Y., Rosa C.H., Kulkarni D.M., Tew J.D., Dayama P.: Auction based mechanisms for electronic procurement. IEEE Trans. Automation Sci. **4** (2006) 297–321.

[8] Galas Z., Nykowski I., Żółkiewski Z., *Programowanie wielokryterialne*. PWE, Warszawa 1987.

[9] Hochner, G., Bichler, M., Davenport, A., Kalagnanam, J.: Industrial procurement auctions. In P.Cramton, Y.Shoham, R.Steinberg (eds.), Combinatorial Auctions, 593–612, The MIT Press, Cambridge, 2006.

[10] Jennings N.R., Faratin P., Lomuscio A.R., Parsons S., Sierra C., Wooldridge M.: Automated negotiation:prospects, method and challenges. Int. J. Group Decision and Negotiation **10** (2001) 199–215.

[11] Kaleta, M., Ogryczak, W., Toczyłowski, E., Żółtowska, I.: On Multiple Criteria Decision Support for the Energy Market Participants. Annals of Operations Research, **121** (2003), 79–104.

[12] Kameshwaran S., Narahari Y., Rosa C.H., Kulkarni D.M., Tew J.D.: Multiattribute electronic procurement using goal programming. Eur. J. Opnl. Res. **179** (2007) 518–536.

[13] Kostreva, M.M., Ogryczak, W., Wierzbicki, A.: Equitable Aggregations and Multiple Criteria Analysis, Eur. J. Opnl. Res. **158** (2004) 362–367.

[14] Kozłowski, B., Ogryczak, W.: On ordered weighted reference point model for multi-attribute procurement auctions, w: ICCCI (1) 2011, Lecture Notes in Computer Science 6922, Springer 2011, 294–303.

[15] Krishna V., Auction Theory, Academic Press, San Francisco, 2002.

[16] Lewandowski, A., Wierzbicki, A.P.: Aspiration Based Decision Support Systems – Theory, Software and Applications. Springer, Berlin 1989.

[17] Morris J., Maes P.: Sardine: An agent-facilitated airline ticket bidding system. 4th International Conference on Autonomous Agents (Agents 2000), Barcelona, Spain.

[18] Narahari Y., Garg D., Narayanam R., Prakash H.: Game Theoretic Problems in Network Economics and Mechanism Design Solutions. Springer 2009.

[19] Nisam N., Roughgarden T., Tardos E., Vazirani V.V. (eds.): Algorithmic Game Theory. Cambridge University Press, Cambridge 2007.

[20] gryczak W.: Simplex Method is not Always Well–behaved, *Linear Algebra and Its Applications*, **109** (1988), 41–57.

[21] gryczak W.: A goal programming model for the reference point method, Annals of Operations Research, **51** (1994), 33–44.

[22] Ogryczak W., *Wielokryterialna optymalizacja liniowa i dyskretna: modele preferencji i zastosowania do wspomagania decyzji.* Wyd. UW, Warszawa 1997.

[23] Ogryczak, W.: Preemptive reference point method. In: Climaco J (ed). *Multicriteria Analysis — Proceedings of the XIth International Conference on MCDM*. Springer, Berlin 1997, 156–167.

[24] Ogryczak, W.: On Goal Programming Formulations of the Reference Point Method. J. Opnl. Res. Soc. **52** (2001) 691–698.

[25] Ogryczak W., Kozłowski B.: Reference Point Method with Importance Weighted Ordered Partial Achievements. TOP **19** (2011), 380–401.

[26] Ogryczak, W., Lahoda, S.: Aspiration/Reservation Decision Support – A Step Beyond Goal Programming. J. MCDA **1** (1992), 101–117.

[27] Ogryczak, W., Studziński, K., Zorychta, K.: DINAS: A Computer-Assisted Analysis System for Multiobjective Transshipment Pproblems with Facility Location. Comp. Opns. Res. **19** (1992) 637–647.

[28] Ogryczak, W., Śliwiński, T.: On solving linear programs with the ordered weighted averaging objective. Eur. J. Opnl. Res. **148** (2003) 80–91.

[29] Ogryczak, W., Śliwiński, T.: On Optimization of the Importance Weighted OWA Aggregation of Multiple Criteria. LNCS **4705** (2007) 804–817.

[30] Petric A., Jezic G.: Reputation Tracking Procurement Auctions. LNCS **5796** (2009) 825–837

[31] Teich J.E., Wallenius H., Wallenius J., Zaitsev A.: A multi-attribute e-auction mechanism for procurement: theoretical foundations. Eur. J. Opnl. Res. **175** (2006) 90–100.

[32] Toczyłowski, E.: Optymalizacja procesw rynkowych przy ograniczeniach. Wydanie II zmienione i poszerzone, 2003, Akademicka Oficyna Wydawnicza EXIT,

[33] Torra, V.: The weighted OWA operator. Int. J. Intell. Syst. **12** (1997) 153–166.

[34] Torra, V., Narukawa, Y.: Modeling Decisions Information Fusion and Aggregation Operators. Springer-Verlag, Berlin 2007.

[35] Wierzbicki, A.P.: A Mathematical Basis for Satisficing Decision Making. Math. Modelling **3** (1982) 391–405.

[36] Wierzbicki, A.P., Makowski, M., Wessels, J. (eds.): Model Based Decision Support Methodology with Environmental Applications. Kluwer, Dordrecht 2000.

[37] Wurman P.R., Wellman M.P., Walsh W.E.: Specifying rules for electronic auctions. AI Magazine **23** (2002) 15–23.

[38] Yager, R.R.: On ordered weighted averaging aggregation operators in multicriteria decision making. IEEE Trans. Systems, Man Cyber. **18** (1988) 183–190.