

Instytut Automatyki i Informatyki Stosowanej
Politechniki Warszawskiej



**Algorytmy predykcyjne w wersji analitycznej z efektywnym
mechanizmem uwzględniania ograniczeń wyjść**

Piotr Marusak

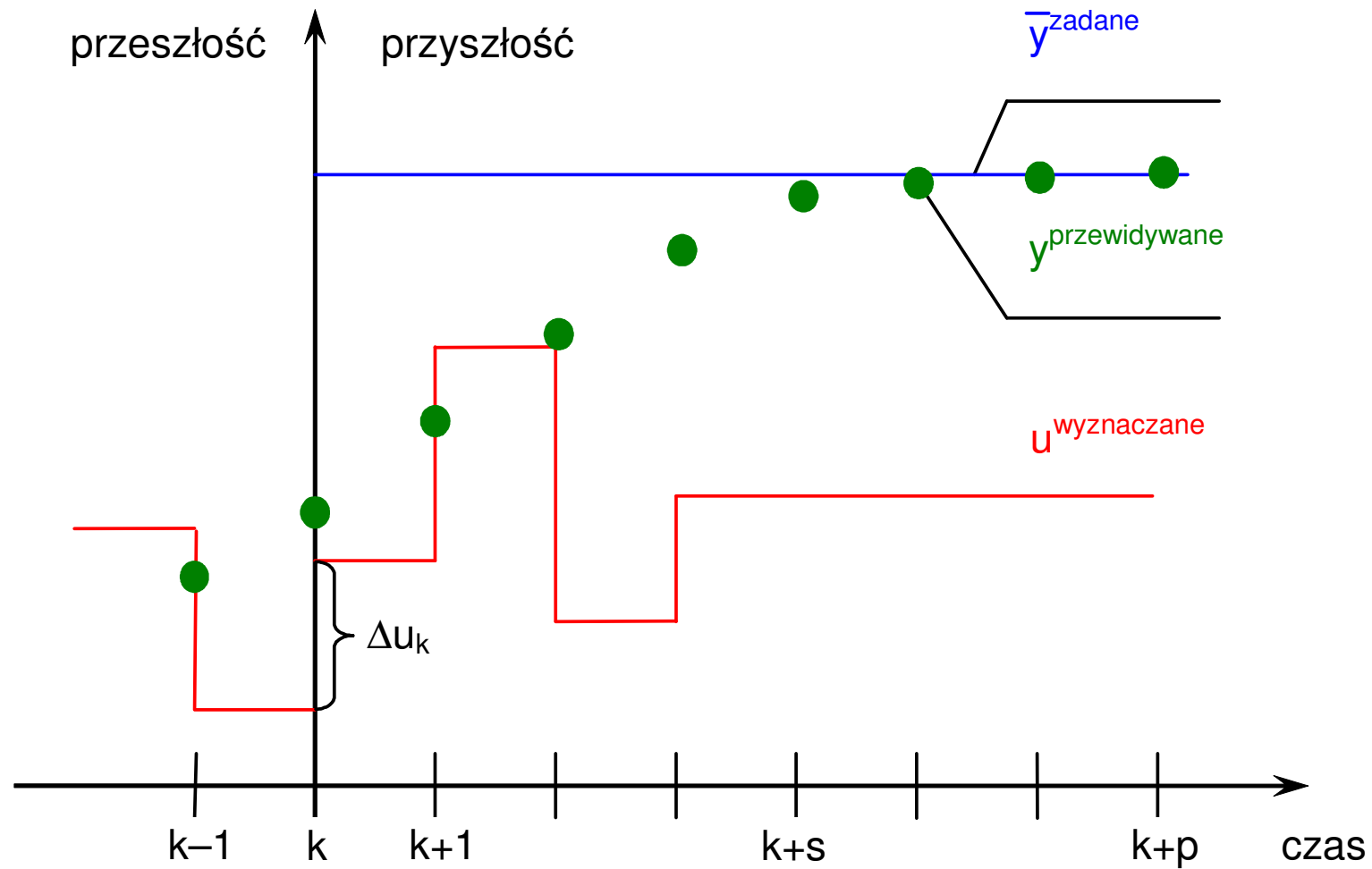
Plan prezentacji

1. Wstęp
2. Algorytmy regulacji predykcyjnej
3. Uwzględnianie ograniczeń nałożonych na sygnał sterujący
4. Uwzględnianie ograniczeń sygnału wyjściowego
 - 4.1. Uproszczenie mechanizmu
 - 4.2. Przypadek uwzględniania niedokładności modelowania
5. Eksperymenty symulacyjne
6. Podsumowanie

Wstęp

- Dwie wersje algorytmów predykcyjnych
- *Wersja numeryczna* – rozwiązywanie zadania optymalizacji kwadratowej z ograniczeniami uwzględnianymi podczas generacji sterowania
- *Wersja analityczna* (wymagająca mniej obliczeń i szybsza) – sterowania generowane na podstawie prawa regulacji; ograniczenia nie są uwzględniane podczas generacji sterowania
 - Uwzględnianie ograniczeń przez przycinanie
 - Do tej pory ograniczenia nałożone na wartości wyjścia mogły być uwzględniane tylko dla następnej chwili
 - W zaproponowanym rozwiązaniu ograniczenia wyjść uwzględniane na całym horyzoncie predykcji

Idea regulacji predykcyjnej



Rys. 1. Idea regulacji predykcyjnej; p – horyzont predykcji, s – horyzont sterowania, Δu_k – przyrost sygnału sterującego w bieżącej iteracji

Algorytmy regulacji predykcyjnej

W każdej iteracji rozwiązywany jest problem optymalizacji:

$$\min_{\Delta u_{k|k}} \left\{ J_{MPC} = \sum_{i=1}^p (\bar{y}_k - y_{k+il|k})^2 + \lambda \cdot (\Delta u_{k|k})^2 \right\}$$

- $\Delta u_{k|k}$ jest szukaną wartością przyszłego przyrostu sterowania
- $y_{k+il|k}$ są przewidywanymi wartościami wyjścia obiektu w przyszłych chwilach
- sposób wyznaczania tych wartości zależy od użytego modelu

Prędykcja w algorytmie DMC

Wykorzystywany jest model w postaci odpowiedzi skokowej:

$$\check{y}_k = \sum_{i=1}^{p_d-1} a_i \cdot \Delta u_{k-i} + a_{p_d} \cdot u_{k-p_d}$$

- a_i są elementami odpowiedzi skokowej obiektu

Przewidywane wartości wyjść:

$$y_{k+ilk} = \sum_{n=1}^i a_n \cdot \Delta u_{k-n+i} + \sum_{n=i+1}^{p_d-1} a_n \cdot \Delta u_{k-n+i} + a_{p_d} \cdot u_{k-p_d+i} + d_k$$

- $d_k = y_k - \check{y}_{k-1}$

Prędykcja w algorytmie DMC

Przewidywane wartości wyjść:

$$\begin{aligned} y_{k+i|k} &= y_k + \sum_{n=i+1}^{p_d-1} a_n \cdot \Delta u_{k-n+i} + a_{p_d} \cdot \sum_{n=p_d}^{p_d+i-1} \Delta u_{k-n+i} - \sum_{n=1}^{p_d-1} a_n \cdot \Delta u_{k-n} + a_i \cdot \Delta u_{k|k} \\ &= \tilde{y}_{k+i|k} + a_i \cdot \Delta u_{k|k} \end{aligned}$$

- $\Delta u_{k|k}$ jest przyszłym przyrostem sterowania

Predykcja w algorytmie bazującym na równaniu różnicowym

Wykorzystywany model:

$$\begin{aligned}\tilde{y}_k = & b_1 \cdot y_{k-1} + b_2 \cdot y_{k-2} + \dots + b_n \cdot y_{k-n} + \\ & + c_1 \cdot u_{k-1} + c_2 \cdot u_{k-2} + \dots + c_m \cdot u_{k-m}\end{aligned}$$

- $b_1, \dots, b_n, c_1, \dots, c_m$ są parametrami modelu obiektu

Przewidywanie wartości wyjść:

Przewidywane wartości wyjść:

$$\begin{aligned} y_{k+ilk} &= \tilde{b}_1^{i-1} \cdot y_k + \tilde{b}_2^{i-1} \cdot y_{k-1} + \dots + \tilde{b}_n^{i-1} \cdot y_{k-n+1} + \tilde{b}_{n+1}^{i-1} \cdot y_{k-n} + \\ &\quad + c_1^{i-1} \cdot \Delta u_{k|k} + c_2^{i-1} \cdot \Delta u_{k-1} + \dots + c_{m-1}^{i-1} \cdot \Delta u_{k-m+2} + c_m^{i-1} \cdot \Delta u_{k-m+1} \\ &= \tilde{y}_{k+ilk} + c_1^{i-1} \cdot \Delta u_{k|k}. \end{aligned}$$

$$\tilde{b}_j^i = \begin{cases} \tilde{b}_1^{i-1} \cdot \tilde{b}_j + \tilde{b}_{j+1}^{i-1}; & j \geq 1, j \leq n \\ \tilde{b}_1^{i-1} \cdot \tilde{b}_j; & j = n+1 \end{cases} \quad c_j^i = \begin{cases} \tilde{b}_1^{i-1} \cdot c_j + c_{j+1}^{i-1}; & j \geq 1, j \leq m-1 \\ \tilde{b}_1^{i-1} \cdot c_j; & j = m \end{cases}$$

$$\tilde{b}_j^0 = \tilde{b}_j = \begin{cases} b_1 + 1; & j = 1 \\ b_j - b_{j-1}; & j \geq 2, j \leq n \\ -b_n; & j = n+1 \end{cases} \quad c_j^0 = c_j$$

Przewidywanie wartości wyjść na horyzoncie predykcji

Przewidywane wartości wyjść na horyzoncie predykcji:

$$\mathbf{y} = \tilde{\mathbf{y}} + \mathbf{A} \cdot \Delta \mathbf{u}_{k|k},$$

$$\mathbf{y} = [y_{k+1|k}, \dots, y_{k+p|k}]^T \text{ przewidywane wartości wyjść}$$

$$\tilde{\mathbf{y}} = [\tilde{y}_{k+1|k}, \dots, \tilde{y}_{k+p|k}]^T \text{ trajektoria swobodna}$$

$$\mathbf{A} = [a_1 \quad \dots \quad a_p]^T \text{ wektor rzędnych odpowiedzi skokowej}$$

Algorytmy regulacji predykcyjnej w wersji analitycznej

W każdej iteracji rozwiązywany jest problem optymalizacji:

$$\min_{\Delta u_{k|k}} \left\{ J_{MPC} = \sum_{i=1}^p \left(\bar{y}_k - y_{k+i|k} \right)^2 + \lambda \cdot \left(\Delta u_{k|k} \right)^2 \right\}$$

bez ograniczeń

Algorytmy regulacji predykcyjnej w wersji analitycznej

W każdej iteracji rozwiązywany jest problem optymalizacji:

$$\min_{\Delta u_{k|k}} \left\{ J_{MPC} = (\bar{\mathbf{y}} - \mathbf{y})^T \cdot (\bar{\mathbf{y}} - \mathbf{y}) + \lambda \cdot (\Delta u_{k|k})^2 \right\}$$

gdzie $\mathbf{y} = \tilde{\mathbf{y}} + \mathbf{A} \cdot \Delta u_{k|k} = [y_{k+1|k}, \dots, y_{k+p|k}]^T$

$$\tilde{\mathbf{y}} = [\tilde{y}_{k+1|k}, \dots, \tilde{y}_{k+p|k}]^T$$

$$\mathbf{A} = [a_1 \quad \dots \quad a_p]^T$$

$$\bar{\mathbf{y}} = [\bar{y}_k, \dots, \bar{y}_k]^T \quad \text{wektor wartości zadanych (} p \text{ elementów)}$$

Algorytmy regulacji predykcyjnej w wersji analitycznej

W każdej iteracji rozwiązywany jest problem optymalizacji:

$$\min_{\Delta u_{k|k}} \left\{ J_{MPC} = (\bar{\mathbf{y}} - \mathbf{y})^T \cdot (\bar{\mathbf{y}} - \mathbf{y}) + \lambda \cdot (\Delta u_{k|k})^2 \right\}$$

gdzie $\mathbf{y} = \tilde{\mathbf{y}} + \mathbf{A} \cdot \Delta u_{k|k} = [y_{k+1|k}, \dots, y_{k+p|k}]^T$

$$\mathbf{A} = [a_1 \quad \dots \quad a_p]^T$$

Rozwiązanie analityczne:

$$\Delta u_{k|k} = (\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A} + \lambda)^{-1} \cdot \mathbf{A}^T \cdot (\bar{\mathbf{y}} - \tilde{\mathbf{y}})$$

Można więc wyznaczyć prawo regulacji.

Prawo regulacji

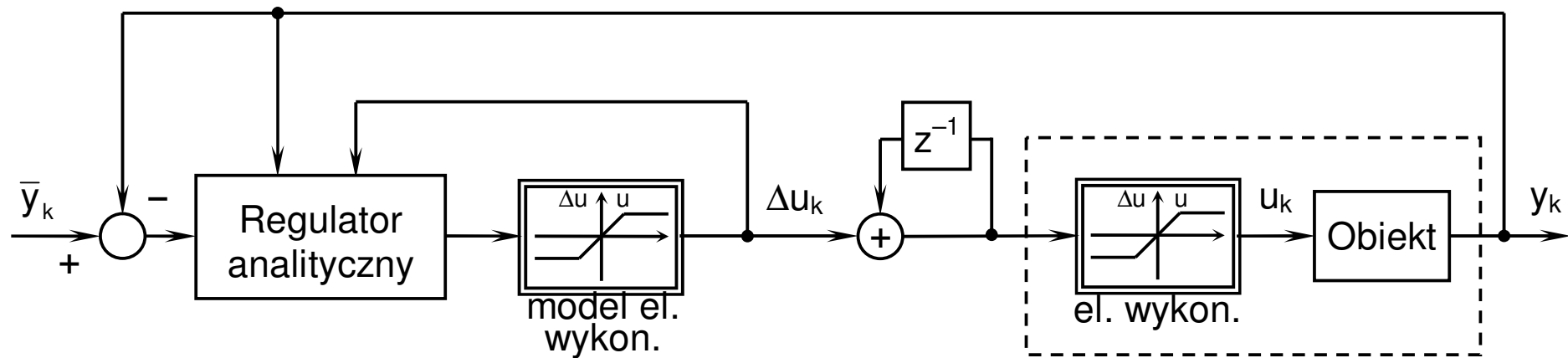
Algorytm DMC

$$\Delta u_{klk} = -r_0 \cdot e_k + \sum_{i=1}^{p_d-1} r_i \cdot \Delta u_{k-i}$$

Algorytm bazujący na modelu w postaci równania różnicowego

$$\Delta u_{klk} = r_e \cdot e_k + \sum_{j=1}^{m-1} r_u^j \cdot \Delta u_{k-j} + \sum_{j=1}^{n+1} r_y^j \cdot y_{k-j+1}$$

Uwzględnianie ograniczeń nałożonych na sygnał sterujący



Rys. 2. Schemat blokowy układu regulacji z analitycznym regulatorem predycyjnym i ograniczeniami uwzględnionymi w regulatorze

Ograniczenia nałożone na:

- przyrosty sterowań

jeśli $\Delta u_{k|k} < \Delta u_{\min}$, to

$$\Delta u_{k|k} = \Delta u_{\min}.$$

jeśli $\Delta u_{k|k} > \Delta u_{\max}$, to

$$\Delta u_{k|k} = \Delta u_{\max}.$$

- wartości sterowań

jeśli $u_{k-1} + \Delta u_{k|k} < u_{\min}$, to

$$\Delta u_{k|k} = u_{\min} - u_{k-1}.$$

jeśli $u_{k-1} + \Delta u_{k|k} > u_{\max}$, to

$$\Delta u_{k|k} = u_{\max} - u_{k-1}.$$

Uwzględnianie ograniczeń sygnału wyjściowego

Ograniczenia:

$$y_{k+ilk} \geq y_{\min} \quad i = 1, \dots, p$$

$$y_{k+ilk} \leq y_{\max} \quad i = 1, \dots, p$$

Przewidywane wartości wyjść:

$$y_{k+ilk} = \tilde{y}_{k+ilk} + a_i \cdot \Delta u_{klk}$$

Uwzględnianie ograniczeń sygnału wyjściowego

Ograniczenia:

$$a_i \cdot \Delta u_{k|k} \geq y_{\min} - \tilde{y}_{k+ilk} \quad i = 1, \dots, p$$

$$a_i \cdot \Delta u_{k|k} \leq y_{\max} - \tilde{y}_{k+ilk} \quad i = 1, \dots, p$$

Reguły przycinania (łącznie **2·p**):

- dla dolnych ograniczeń

$$\text{jeśli } a_i \cdot \Delta u_{k|k} \leq y_{\min} - \tilde{y}_{k+ilk} \text{ to } \Delta u_{k|k} = \frac{y_{\min} - \tilde{y}_{k+ilk}}{a_i}$$

- dla górnych ograniczeń

$$\text{jeśli } a_i \cdot \Delta u_{k|k} \geq y_{\max} - \tilde{y}_{k+ilk} \text{ to } \Delta u_{k|k} = \frac{y_{\max} - \tilde{y}_{k+ilk}}{a_i}$$

Uproszczenie mechanizmu

Przyjmijmy:

$$y_{k+l|k} = \min\{y_{k+1|k}, \dots, y_{k+p|k}\}$$

$$y_{k+h|k} = \max\{y_{k+1|k}, \dots, y_{k+p|k}\}$$

Reguły przycinania (łącznie **2**):

- dla dolnych ograniczeń

$$\text{jeśli } y_{k+l|k} \leq y_{\min} \text{ to } \Delta u_{k|k} = \frac{y_{\min} - \tilde{y}_{k+l|k}}{a_l}$$

- dla górnych ograniczeń

$$\text{jeśli } y_{k+h|k} \geq y_{\max} \text{ to } \Delta u_{k|k} = \frac{y_{\max} - \tilde{y}_{k+h|k}}{a_h}$$

Uwzględnianie niedokładności modelowania

Predykcja z uwzględnieniem niedokładności:

$$\hat{y}_{k+ilk} = y_{k+ilk} + r_{k+ilk} = \tilde{y}_{k+ilk} + a_i \cdot \Delta u_{k|k} + r_{k+ilk}$$

r_{k+ilk} reprezentuje wpływ błędu modelowania na dokładność predykcji

Oszacowanie niedokładności:

$$r_{k+ilk}^{\min} \leq r_{k+ilk} \leq r_{k+ilk}^{\max}$$

gdzie $r_{k+ilk}^{\min} \leq 0, r_{k+ilk}^{\max} \geq 0$

Uwzględnianie niedokładności modelowania

Przyjmijmy:

$$y_{k+l|k}^r = \min\{y_{k+1|k} + r_{k+1|k}^{\min}, \dots, y_{k+p|k} + r_{k+p|k}^{\min}\}$$

$$y_{k+h|k}^r = \max\{y_{k+1|k} + r_{k+1|k}^{\max}, \dots, y_{k+p|k} + r_{k+p|k}^{\max}\}$$

Reguły przycinania:

- dla dolnych ograniczeń

$$\text{jeśli } y_{k+l|k} + r_{k+l|k}^{\min} \leq y_{\min} \quad \text{to} \quad \Delta u_{k|k} = \frac{y_{\min} - r_{k+l|k}^{\min} - \tilde{y}_{k+l|k}}{a_l}$$

- dla górnych ograniczeń

$$\text{jeśli } y_{k+h|k} + r_{k+h|k}^{\max} \geq y_{\max} \quad \text{to} \quad \Delta u_{k|k} = \frac{y_{\max} - r_{k+h|k}^{\max} - \tilde{y}_{k+h|k}}{a_h}$$

Uproszczenie

Przyjmijmy:

$$r_{\min} = \min\{r_{k+1|k}^{\min}, \dots, r_{k+p|k}^{\min}\}$$

$$r_{\max} = \max\{r_{k+1|k}^{\max}, \dots, r_{k+p|k}^{\max}\}$$

Wtedy:

$$y_{k+l|k}^r = y_{k+l|k} + r_{\min} = \min\{y_{k+1|k} + r_{\min}, \dots, y_{k+p|k} + r_{\min}\}$$

$$y_{k+h|k}^r = y_{k+h|k} + r_{\max} = \max\{y_{k+1|k} + r_{\max}, \dots, y_{k+p|k} + r_{\max}\}$$

Uproszczenie

Przyjmijmy:

$$y_{k+lk}^r = y_{k+lk} + r_{\min} = \min\{y_{k+lk} + r_{\min}, \dots, y_{k+pk} + r_{\min}\}$$

$$y_{k+hk}^r = y_{k+hk} + r_{\max} = \max\{y_{k+lk} + r_{\max}, \dots, y_{k+pk} + r_{\max}\}$$

Reguły przycinania:

- dla dolnych ograniczeń

$$\text{jeśli } y_{k+lk} + r_{\min} \leq y_{\min} \quad \text{to} \quad \Delta u_{k|k} = \frac{y_{\min} - r_{\min} - \tilde{y}_{k+lk}}{a_l}$$

- dla górnych ograniczeń

$$\text{jeśli } y_{k+hk} + r_{\max} \geq y_{\max} \quad \text{to} \quad \Delta u_{k|k} = \frac{y_{\max} - r_{\max} - \tilde{y}_{k+hk}}{a_h}$$

Obiekt regulacji

$$G(s) = \frac{s+1}{4s^2+2s+1} \cdot e^{-4s}$$

- Oscylacyjny, z opóźnieniem, symulowany z okresem próbkowania $T_{sp}=0.1$

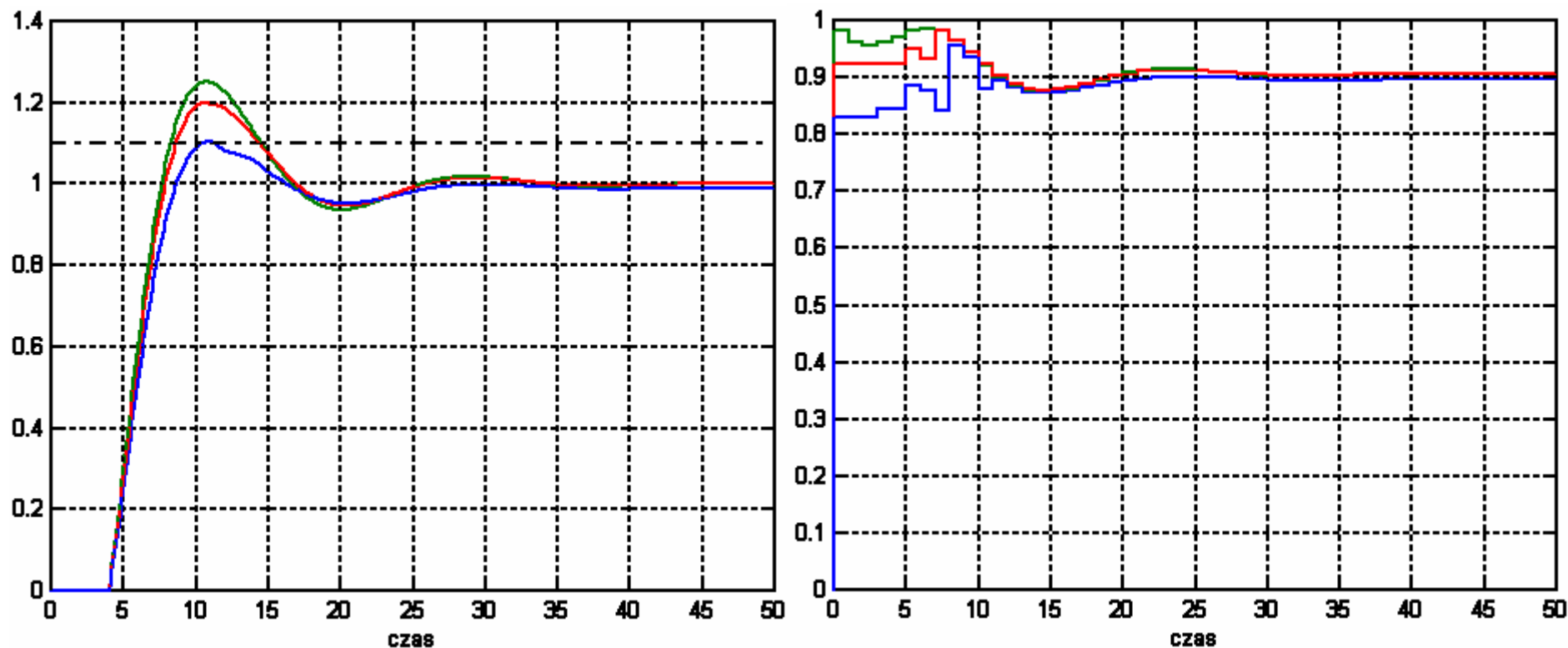
Model obiektu wykorzystany w regulatorze

$$y_k = 1,414 \cdot y_{k-1} - 0,6065 \cdot y_{k-2} + 0,2931 \cdot u_{k-5} - 0,1004 \cdot u_{k-6}$$

- Okres próbkowania regulatora $T_{sc}=1$
- Parametry regulatora: $p=20$ i $\lambda=0$
- Ograniczenie wyjścia

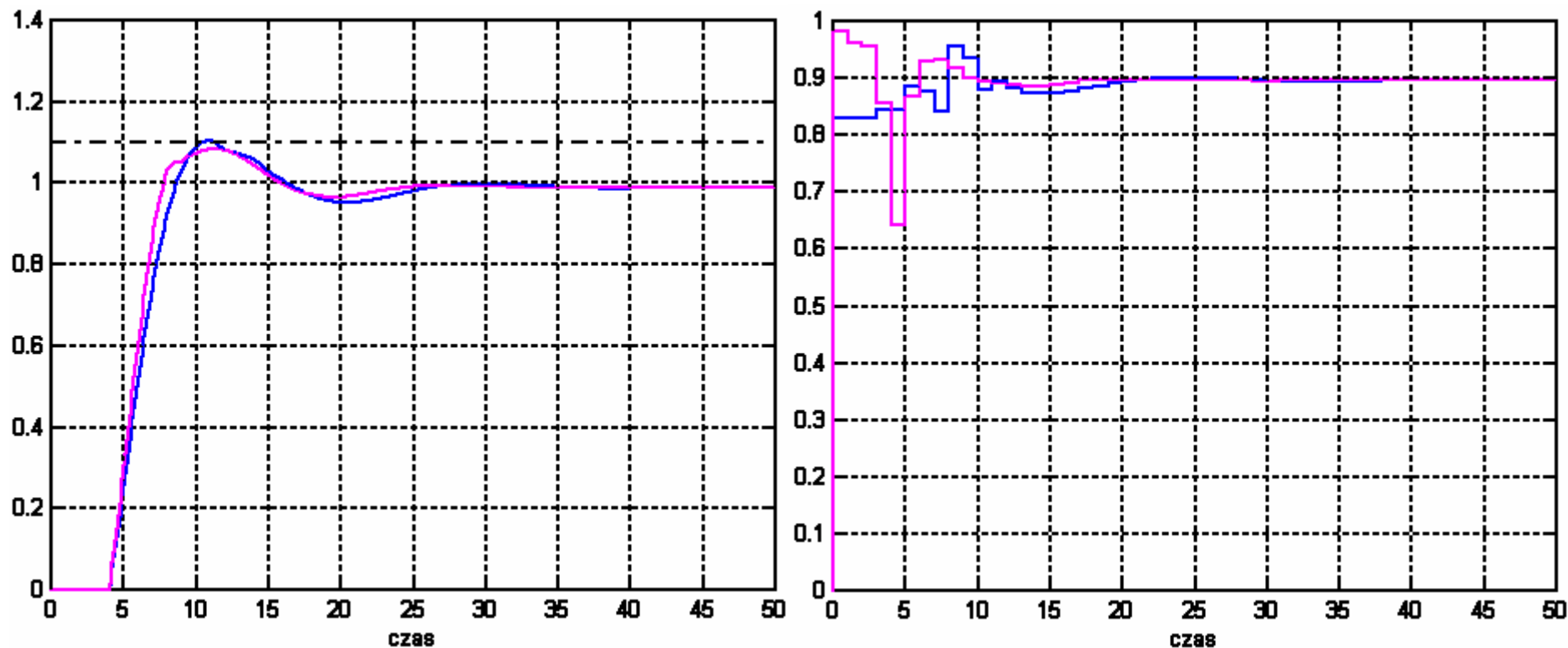
$$y_{k+i} \leq 1,1$$

Eksperymenty symulacyjne



Rys. 3. Odpowiedzi układu regulacji na skok wartości zadanej z 0 do 1; ograniczenia wyjścia: **nie uwzględnione**, **uwzględnione**, **uwzględnione z marginesem bezpieczeństwa**; po lewej – wyjście, po prawej – sterowanie

Eksperymenty symulacyjne



Rys. 4. Odpowiedzi układu regulacji na skok wartości zadanej z 0 do 1; ograniczenia wyjścia uwzględnione z marginesem bezpieczeństwa; **tylko pierwsza wartość z horyzontu predykcji wzięta pod uwagę**, **wszystkie wartości z horyzontu predykcji wzięte pod uwagę**; po lewej – wyjście, po prawej – sterowanie

Podsumowanie

- Zaproponowano algorytmy predykcyjne w wersji analitycznej z efektywnym mechanizmem uwzględniania ograniczeń wyjść
- Dzięki zastosowaniu krótkiego horyzontu sterowania jest możliwe uwzględnianie ograniczeń na całym horyzoncie predykcji
- Zaproponowano prostą metodę uwzględniania ograniczeń
- Pokazano, jak uwzględnić niedokładność modelowania