



**Mgr inż. Piotr M. Marusak**

**REGULACJA PREDYKCYJNA OBIEKTÓW  
NIELINIOWYCH Z ZASTOSOWANIEM  
TECHNIKI DMC I MODELOWANIA ROZMYTEGO**

Rozprawa doktorska

Promotor:  
Prof. nzw. dr hab. Piotr Tatjewski

## Spis treści

1. Wprowadzenie .....	4
2. Algorytmy regulacji predykcyjnej z przesuwaniem horyzontem .....	8
2.1. Idea działania algorytmów predykcyjnych z przesuwaniem horyzontem .....	8
2.2. Algorytmy DMC w wersji analitycznej i numerycznej .....	10
2.3. Inne odmiany algorytmów predykcyjnych z przesuwaniem horyzontem .....	16
2.4. Wyprowadzenie algorytmu predykcyjnego z modelem w postaci równania różnicowego .....	18
2.5. Algorytmy predykcyjne z powtarzaną linearyzacją dla obiektów nieliniowych .....	20
3. Opis struktur rozmytych algorytmów predykcyjnych z przesuwaniem horyzontem .....	23
3.1. Opis struktury i właściwości modeli Takagi–Sugeno .....	23
3.2. Rozmyte regulatory predykcyjne w wersji analitycznej .....	27
3.3. Rozmyte algorytmy predykcyjne w wersji numerycznej .....	31
4. Analiza stabilności układów regulacji z regulatorami predykcyjnymi .....	41
4.1. Układy regulacji z konwencjonalnymi regulatorami predykcyjnymi w wersji analitycznej .....	42
4.2. Układy regulacji z algorytmami predykcyjnymi w wersji numerycznej .....	44
4.2.1. Algorytm regulacji predykcyjnej z ograniczeniem na stan końcowy .....	45
4.2.2. Algorytm regulacji predykcyjnej z nieskończonym horyzontem .....	48
4.2.3. Inne algorytmy regulacji predykcyjnej zapewniające stabilność układów regulacji .....	49
4.2.4. Suboptymalne algorytmy regulacji predykcyjnej .....	50
4.2.5. Dopuszczalność rozwiązań zadania optymalizacji w obecności ograniczeń nałożonych na wyjścia obiektu regulacji. ....	52
4.3. Układy regulacji z algorytmami DMC w wersji numerycznej .....	53
4.3.1. Algorytm regulacji DMC z nieskończonym horyzontem .....	53
4.3.2. Algorytm regulacji DMC z ograniczeniem nałożonym na stan końcowy .....	56
4.4. Układy regulacji z rozmytymi regulatorami predykcyjnymi w wersji analitycznej .....	57
4.4.1. Kryterium stabilności dla układów opisanych modelami Takagi–Sugeno .....	57
4.4.2. Przekształcenie układu regulacji z regulatorem i obiektem opisanymi modelami Takagi–Sugeno .....	58
4.5. Układy regulacji z rozmytymi algorytmami predykcyjnymi w wersji numerycznej .....	68
5. Uwzględnianie ograniczeń nałożonych na wyjścia obiektu regulacji w konwencjonalnych i rozmytych algorytmach DMC .....	79
5.1. Sterowanie przy ograniczeniach nałożonych na wyjścia modelu obiektu regulacji .....	80
5.1.1. Algorytmy DMC .....	80
5.1.2. Algorytmy FDMC w wersji analitycznej .....	83
5.1.3. Algorytmy FDMC w wersji numerycznej .....	85
5.2. Sterowanie przy ograniczeniach nałożonych na wyjścia obiektu regulacji .....	86
5.2.1. Przypadek niepewności modelowanej jako zakłócenie dodawane do wyjścia modelu obiektu regulacji .....	87
5.2.2. Przypadek niepewności wynikającej z niedokładnej znajomości parametrów modelu obiektu regulacji .....	90

6. Implementacja algorytmów FDMC .....	97
6.1. Implementacja algorytmu FDMC na sterowniku logicznym PLC .....	97
6.2. Biblioteka regulatorów DMC i FDMC w pakiecie REGZA .....	98
7. Podsumowanie wyników pracy i wnioski .....	104
Literatura .....	106
Dodatek: Próbki z fizykochemicznego modelu statyki kolumny etylenowej .....	112

## 1. Wprowadzenie

Algorytm predykcyjny DMC – Dynamic Matrix Control [23] został opracowany dla potrzeb przemysłu petrochemicznego na przełomie lat 70–tych i 80–tych ubiegłego stulecia. Algorytm ten, jak twierdzą M. Morari i J. H. Lee [75] „... miał kolosalny wpływ na przemysł. Nie ma chyba na świecie większej firmy naftowej, w której DMC (lub funkcjonalnie podobny produkt z inną nazwą handlową) nie byłby zastosowany w większości nowych instalacji lub modernizacji. ...”. Początkowo były formułowane i badane wersje tego algorytmu wykorzystujące liniowe modele obiektów regulacji.

Pierwsza z tych wersji, analityczna, charakteryzuje się tym, że główna część obliczeń jest wykonywana off–line i prowadzi do wyznaczenia parametrów regulatora predykcyjnego [90], a w konsekwencji do stosunkowo prostej jego struktury. Wszelkiego rodzaju ograniczenia są możliwe do uwzględnienia w tym algorytmie w sposób przybliżony, poprzez zastosowanie metody rzutowania sterowań na zbiór ograniczeń [66]. Metoda ta nie daje w ogólności rozwiązania optymalnego, ale w wielu przypadkach, bardzo zbliżone do optymalnego rezultaty [102].

Druga wersja algorytmu DMC, którą nazywamy dalej numeryczną, bazuje natomiast na rozwiązywaniu w każdym kroku, zadania optymalizacji kwadratowej z ograniczeniami liniowymi [32]. Algorytm ten jest znany pod nazwą QDMC. W algorytmie QDMC ograniczenia są uwzględniane w naturalny sposób, jednak kosztem konieczności rozwiązywania zadania optymalizacji w każdym kroku działania algorytmu.

Ostatnio przedmiotem badań są algorytmy regulacji predykcyjnej dla problemów nieliniowych. Wiele z nich polega na rozwiązywaniu zadania optymalizacji nieliniowej w każdym kroku algorytmu. Niestety, problem optymalizacji w ogólności nie jest wypukły, więc zapotrzebowanie na moc obliczeniową przy rozwiązywaniu problemu on–line może być na tyle duże, że praktyczna implementacja podejścia opartego na dokładnej optymalizacji będzie niemożliwa do zrealizowania. Ponadto, nawet jeśli rozwiązanie zostałoby znalezione, mogłoby to być rozwiązanie jedynie lokalne.

Dlatego w niniejszej pracy zaproponowano algorytmy nazywane dalej algorytmami FDMC (Fuzzy DMC) [67], łączące w sobie dwie techniki (i ich zalety): regulację predykcyjną i modele rozmyte Takagi–Sugeno. Algorytmy te wymagają w każdym kroku, jedynie rozwiązywania zadania optymalizacji kwadratowej bez ograniczeń (w wersji analitycznej) lub z ograniczeniami liniowymi (w wersji numerycznej). Algorytmy FDMC, zastosowane do regulacji procesów nieliniowych, mogą przynieść znaczną poprawę jakości regulacji w szerokim zakresie zmian wartości zadanej, w stosunku do konwencjonalnych regulatorów predykcyjnych (wykorzystujących modele liniowe) bądź w ogóle taką regulację umożliwić.

Algorytmy FDMC bazują na dwóch podejściach: syntezie rozmytego regulatora z wykorzystaniem kilku lokalnych regulatorów liniowych DMC lub na idei polegającej na wyznaczeniu w każdym kroku, na podstawie modelu nieliniowego (w różny sposób, zależny od konkretnego podejścia), modeli liniowych służących następnie do predykcji i konstrukcji regulatora. Zabieg ten umożliwia sformułowanie zadania optymalizacji liniowo–kwadratowej i uniknięcie w ten sposób rozwiązywania skomplikowanego zadania optymalizacji nieliniowej.

W algorytmie FDMC wykorzystującym pierwsze podejście, dobiera się konwencjonalne regulatory DMC w wersji analitycznej do każdego spośród zbioru wybranych punktów pracy obiektu nieliniowego (np. w przypadku modelowania rozmytego obiektu typu Takagi–Sugeno, do każdego z lokalnych modeli wchodzących w skład nieliniowego modelu obiektu regulacji). Takie podejście sprawia, że główna część obliczeń, potrzebnych do wyznaczenia sterowań, jest wykonywana raz (off–line).

W przypadku algorytmów FDMC korzystających z drugiego podejścia, w każdym kroku ich działania, na podstawie nieliniowego, rozmytego modelu obiektu, wyznacza się model

liniowy. Warto w tym miejscu zaznaczyć, że sposób wyznaczania tego modelu czyni proponowane podejście bardziej atrakcyjnym od innych algorytmów wykorzystujących linearyzację, ponieważ jest szczególnie prosty, gdyż wynika w naturalny sposób z wnioskowania rozmytego (zob. rozdz. 3).

Dużym atutem może być także model obiektu w postaci odpowiedzi skokowych, wykorzystywany w algorytmach typu DMC. Dzięki niemu bowiem, można znacznie uprościć procedurę projektowania regulatorów rozmytych (szczególnie tych o najprostszej strukturze) i na podstawie odpowiedzi skokowych otrzymanych z okolic kilku punktów pracy dokonać syntezy regulatora, jak to zrobiono w przykładzie z rozdz. 6.2.

Celem pracy było opracowanie metod syntezy i analizy właściwości układów regulacji wykorzystujących proponowane algorytmy w przypadkach istnienia w układzie regulacji ograniczeń nałożonych na sygnały sterujące i sygnały wyjściowe, działania zakłóceń, a także przy niepewności modelowania obiektu regulacji. Celem pracy było także wykazanie, że opracowane algorytmy zastosowane do regulacji procesów nieliniowych mogą przynieść znaczną poprawę jakości regulacji w stosunku do konwencjonalnych regulatorów predykcyjnych nie ustępując przy tym, szczególnie pod względem możliwości projektowania stabilnych układów regulacji, algorytmom z pełną nieliniową optymalizacją.

W niniejszej pracy jest rozważany głównie przypadek algorytmów sterowania obiektów o jednym wejściu i jednym wyjściu. Wszystkie opracowane metody w prosty i naturalny sposób można użyć także w przypadku wielowymiarowym, czego ilustracją jest przykład zamieszczony w rozdz. 6.2 niniejszej pracy.

Dorobkiem autora jest opracowanie:

- rozmytych algorytmów predykcyjnych z przesuwającym horyzontem w wersji analitycznej, których struktura umożliwia ich wykorzystanie w sytuacji dysponowania małymi mocami obliczeniowymi;
- metody analizy stabilności układów regulacji z rozmytymi regulatorami predykcyjnymi w wersji analitycznej;
- rozmytych algorytmów predykcyjnych uzupełnionych o mechanizmy dzięki którym, układy regulacji wykorzystujące te algorytmy są stabilne;
- uniwersalnych (dających się zastosować także w przypadku innych regulatorów wykorzystujących podejście Takagi–Sugeno) metod uwzględniania ograniczeń nałożonych na wyjścia obiektu regulacji w przypadku niepewności modelowania. Rozpatrywano przy tym niepewność modelowaną jako zakłócenie dodane do wyjścia modelu obiektu regulacji oraz niepewność wynikającą z niedokładnej znajomości parametrów modelu obiektu regulacji;
- implementacji wymienionych algorytmów, a w szczególności realizacji rozmytego algorytmu predykcyjnego na sterowniku logicznym PLC;
- szeregu rozwiązań dotyczących konwencjonalnego algorytmu DMC. W szczególności uzupełniono jego analityczną wersję o możliwość uwzględniania ograniczeń nałożonych na wyjścia obiektu regulacji w warunkach niepewności modelowania. Ponadto przedstawiono metody takiej modyfikacji algorytmu w wersji z optymalizacją, aby była zapewniona stabilność układów regulacji wykorzystujących te algorytmy. Wskazano także podobieństwa pomiędzy poszczególnymi mechanizmami prowadzącymi do osiągnięcia tego celu.

Zawartość pracy omówiono krótko w dalszych akapitach. Rozdz. 2 zawiera wprowadzenie do zagadnienia algorytmów regulacji predykcyjnej z przesuwającym horyzontem. Oprócz przedstawienia ogólnej idei tego typu algorytmów, obejmuje on krótki przegląd wczesnych ich odmian z opisaniem ciekawszych mechanizmów wprowadzanych do tych algorytmów.

W rozdziale tym znajduje się wyprowadzenie algorytmu DMC w wersji analitycznej i omówienie wersji numerycznej tego algorytmu; na nich bowiem bazuje większość przedstawionych w pracy algorytmów rozmytych. Ponadto zamieszczono wyprowadzenie algorytmu predykcyjnego z modelem w postaci równania różnicowego analogiczne do wyprowadzenia algorytmu DMC. Ostatnią częścią rozdziału jest przegląd algorytmów predykcyjnych wykorzystujących modele nieliniowe procesów i ich linearyzację w każdym kroku algorytmu, będącą jednocześnie wprowadzeniem do kolejnego rozdziału.

Na początku rozdz. 3 krótko omówiono modele rozmyte typu Takagi–Sugeno, a następnie algorytmy predykcyjne je wykorzystujące. Opisano zarówno algorytmy w wersji analitycznej, w których główna część obliczeń jest wykonywana raz (off–line), jak i algorytmy w wersji numerycznej. Pokazano przykłady zastosowania różnych odmian algorytmów do regulacji nieliniowego obiektu z dużym opóźnieniem, porównując jakość regulacji oferowaną przez poszczególne regulatory.

Rozdz. 4 pracy dotyczy zagadnienia stabilności układów regulacji z regulatorami predykcyjnymi z przesuwany horyzontem. W pierwszej jego części dokonano szerokiego przeglądu istniejących rozwiązań tego problemu oraz uporządkowania zagadnienia. Omówiono przy tym m.in. najczęściej stosowane metody zapewniania stabilności układów regulacji z regulatorami predykcyjnymi.

Pierwsza z tych metod polega na dodaniu do zadania optymalizacji ograniczeń równościowych nałożonych na zmienne wyjściowe lub ogólnie na zmienne stanu, wymuszających stałość tych zmiennych w chwilach sięgających poza horyzont predykcji. Druga metoda wykorzystuje odpowiednią modyfikację wskaźnika jakości poprzez wprowadzenie kosztu końcowego i sformułowanie w ten sposób zadania z quasi–nieskończonym horyzontem. Kolejna metoda zapewniania stabilności układu regulacji z algorytmem predykcyjnym polega na sprowadzeniu stanu układu do pewnego otoczenia punktu równowagi za pomocą algorytmu predykcyjnego, a następnie zastosowaniu liniowego regulatora wewnątrz tego otoczenia.

Następnie pokazano sposób wykorzystania pierwszych dwóch z wymienionych mechanizmów modyfikacji algorytmu zapewniających stabilność układu regulacji, w przypadku konwencjonalnych regulatorów DMC. Udowodniono stabilność tak zaprojektowanych układów regulacji i wskazano podobieństwa pomiędzy obydwojma rozwiązaniami.

W dalszej kolejności przedstawiono sposób badania stabilności układów regulacji z rozmytymi algorytmami regulacji predykcyjnej w wersji analitycznej. Metoda ta nadaje się do analizy stabilności układów regulacji obiektów z opóźnieniem.

Ostatnia część rozdziału zawiera opis opracowanych mechanizmów zapewniania stabilności układów regulacji z rozmytymi algorytmami predykcyjnymi, opartymi na rozwiązywaniu zadania optymalizacji liniowo–kwadratowej w każdym kroku działania algorytmu. Mechanizmy, o których mowa, polegają na wprowadzaniu dodatkowych elementów do sformułowania zadania optymalizacji, w celu zapewnienia stabilności otrzymanych układów regulacji. Aby osiągnąć zamierzony cel, zastosowano elementy kilku metod, spośród opisanych w przeglądzie dokonany na początku rozdziału.

Otrzymano efektywne algorytmy przeznaczone do regulacji obiektów nieliniowych, które oferują wszystkie zalety regulacji predykcyjnej, zapewniają stabilność układu regulacji, w którym zostały użyte i jednocześnie nie wymagają rozwiązywania zadania optymalizacji nieliniowej, lecz jedynie zadania programowania liniowo–kwadratowego. Jest to istotna zaleta opracowanych algorytmów, ponieważ jak twierdzą Morari i Lee [75] „... Pomimo tego, że teoretyczni puryści unikają podejść z linearyzacją, to linearyzacja jest jedyną metodą, która znalazła szersze zastosowanie w przemyśle wychodzące poza projekty demonstracyjne. ...”. Warto w tym miejscu podkreślić, że w opracowanych algorytmach model liniowy jest wyzna-

czany w sposób naturalny z wnioskowania rozmytego, co czyni proponowane podejście jeszcze bardziej atrakcyjnym.

Rozdz. 5 zawiera opis sposobów uwzględniania w omawianych algorytmach ograniczeń nałożonych na wartości wyjść (w szczególności nieregulowanych) obiektu regulacji, w przypadku istnienia niepewności modelowania. Istotnym problemem jest tutaj konieczność wprowadzania ograniczeń liniowych, aby w celu wyznaczenia sterowań wystarczyło rozwiązać zadanie programowania liniowo–kwadratowego.

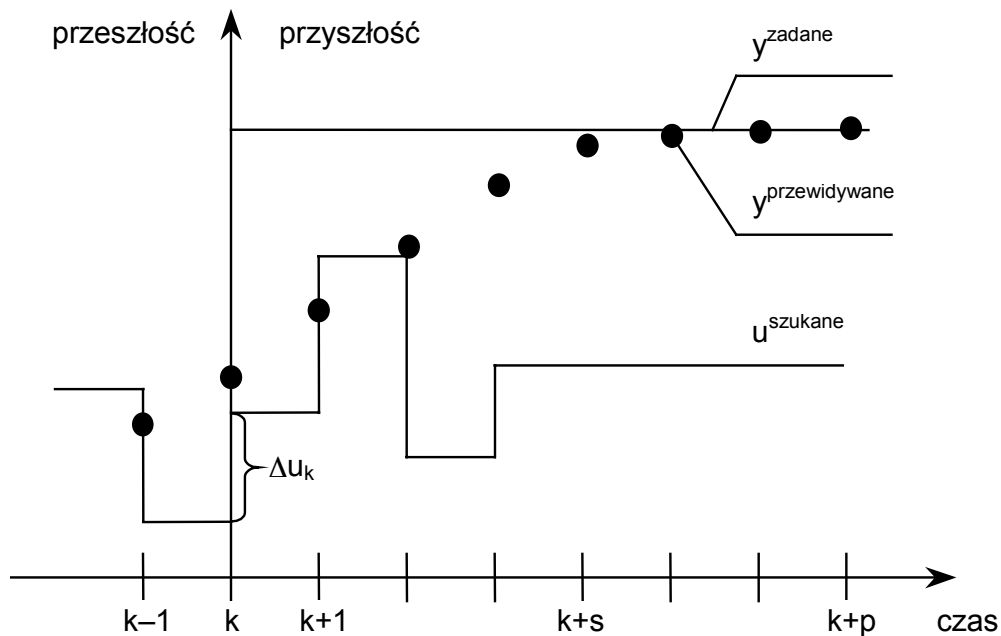
Najpierw przedstawiono przypadek ograniczeń nałożonych na wyjście modelu obiektu. Następnie opisano metody dotyczące uwzględniania ograniczeń nałożonych na wyjścia obiektu regulacji w warunkach niepewności modelowanej jako zakłócenie dodane do wyjścia modelu obiektu regulacji oraz niepewności wynikającej z niedokładnej znajomości parametrów modelu obiektu regulacji. Problem rozwiązano zapewniając spełnienie ograniczenia przewidywanych wartości wyjść obiektu regulacji w kolejnej chwili poprzez odpowiednie ograniczenie sterowań. Wykorzystano przy tym podejście polegające na rozpatrywaniu najgorszego przypadku [68].

W pierwszej części rozdz. 6 krótko opisano implementację algorytmu FDMC w wersji analitycznej na sterowniku logicznym PLC. Następnie omówiono bibliotekę z implementacją algorytmów opracowaną dla pakietu REGZA, służącego do projektowania i testowania układów regulacji zaawansowanej i przykład zastosowania tej biblioteki do regulacji obiektu wielowymiarowego. Pracę kończy podsumowanie i wykaz cytowanej literatury.

## 2. Algorytmy regulacji predykcyjnej z przesuwającym horyzontem

### 2.1. Idea działania algorytmów predykcyjnych z przesuwającym horyzontem

Algorytmy predykcyjne z przesuwającym horyzontem charakteryzują się tym, że podczas wyznaczania sterowania są w nich brane pod uwagę nie tylko informacje z bieżącej chwili, ale także przewidywane jest zachowanie układu regulacji w przyszłości na wiele chwil do przodu (rys. 2.1). Predykcja dokonywana jest na podstawie dostępnych informacji o obiekcie regulacji, o występujących ograniczeniach, o przyszłych (przewidywanych) zakłóceniach oraz na podstawie innych informacji mogących poprawić jakość prognozy. Innymi słowy jest możliwe użycie całej dostępnej wiedzy podczas opracowywania regulatora, a algorytmy predykcyjne z przesuwającym horyzontem, dzięki sposobowi ich formułowania oraz strukturze pozwalają uczynić to możliwie efektywnie [13, 14, 53, 65]. Przyszłe sterowania są przez regulator wyznaczone tak, aby przewidywane zachowanie układu regulacji spełniało założone kryteria, najczęściej żąda się aby był minimalizowany przyjęty wskaźnik jakości, a sygnały sterujące oraz wyjściowe nie naruszały ograniczeń.



Rys. 2.1. Ilustracja zasady regulacji predykcyjnej;  $p$  – horyzont predykcji,  $s$  – horyzont sterowania,  $\Delta u_k$  – przyrost sterowania w chwili  $k$

W algorytmach predykcyjnych wykorzystujących modele typu wejście–wyjście najczęściej jest używany wskaźnik jakości:

$$J = \sum_{i=p_1}^p \kappa_i \cdot (y_{k+i|k}^{zad} - y_{k+i|k})^2 + \sum_{i=0}^{s-1} \lambda_i \cdot (\Delta u_{k+i|k})^2, \quad (2.1)$$

gdzie  $y_{k+i|k}^{zad}$  – trajektoria zadana,  $y_{k+i|k}$  jest przewidywaną, w bieżącej chwili  $k$ , wartością wyjścia obiektu regulacji dla przyszłej chwili  $k+i$  zależną od przeszłych i przyszłych sterowań (sposób jej wyznaczania zależy od sposobu predykcji, a w szczególności od przyjętego modelu obiektu regulacji),  $\kappa_i \geq 0$  współczynniki ważące przyszłe uchyby,  $\lambda_i \geq 0$  współczynniki ważące poszczególne przyrosty sterowania w składniku będącym karą za zmienność sterowania,  $\Delta u_{k+i|k}$  – przyszłe (szukane) przyrosty sterowania,  $p$  jest tzw. horyzontem predykcji, przyjmuje się bowiem, że zachowanie obiektu regulacji jest przewidywane na  $p$  chwil do



przodu;  $s \leq p$  jest tzw. horyzontem sterowania, gdyż zakłada się, że na podstawie predykcji wyznaczane jest  $s$  przyszłych sterowań lub przyrostów sterowań (zależnie od sformułowania zadania). Dla pozostałych sterowań (w chwilach od  $k+s$  zaczynając) przyjmuje się zerowe przyrosty sterowania;  $p_1 \geq 1$ , przy czym wartości większe od 1 są wprowadzane w celu uproszczenia rozwiązywania zadania optymalizacji w sytuacji, gdy w obiekcie regulacji jest opóźnienie  $d$ . Wówczas pierwsze  $d$  składników pierwszej sumy we wskaźniku jakości nie zależy od wyznaczanych sterowań i może być po prostu pominięte.

Parę słów komentarza warto poświęcić postaciom trajektorii zadanej. Otóż można zakładać, że wartość zadana pozostaje stała na całym horyzoncie predykcji i tak założono w niniejszej pracy. Trajektorja zadana może być także przyjmowana na podstawie znanych zawczasu zmian wartości zadanej (np. w regulacji programowej), tzn. odpowiednie jej elementy będą równe zakładanym w przyszłości wartościom zadany; czyli  $y_{k+i|k}^{zad} = y_{k+i}^{zad}$ , gdzie  $y_{k+i}^{zad}$  – wartość zadana, która zostanie podana na wejście układu regulacji w chwili  $k+i$ .

Istnieje także przypadek pośredni. Można mianowicie przyjąć trajektorię zadaną stopniowo dochodzącą od bieżącej wartości wyjścia do wartości zadanej, w celu złagodzenia charakterów przebiegów w układzie regulacji z opracowywanym algorytmem. Skutek działania tego mechanizmu jest podobny do wprowadzenia kary za przyrosty sterowań. Pomysł ten pojawił się stosunkowo szybko, praktycznie razem z opracowaniem algorytmów predykcyjnych. Można przyjąć różnego rodzaju postaci trajektorii zadanej, przy czym najczęściej zakłada się najprostszą trajektorię pierwszego rzędu, tzn. [93]:

$$\begin{aligned} y_{k+i|k}^{zad} &= \alpha \cdot y_{k+i-1|k}^{zad} + (1 - \alpha) \cdot y_k^{zad}; \\ y_{k|k}^{zad} &= y_k, \end{aligned} \quad (2.2)$$

gdzie  $0 \leq \alpha < 1$ ,  $y_k^{zad}$  – wartość zadana, podana na wejście układu regulacji,  $y_{k+i|k}^{zad}$  – wartość na trajektorii zadanej dla chwili  $k+i$  z horyzontu predykcji, wyznaczona w chwili  $k$ .

Mechanizm tutaj przedstawiony może kojarzyć się z wprowadzaniem filtru na wejściu wartości zadanej do układu regulacji, jednak nie jest mu równoważny ze względu na sposób działania algorytmów predykcyjnych [53].

Algorytmy predykcyjne, dzięki ich cechom, warto stosować w przypadkach, gdy:

- obiekt zawiera duże opóźnienia (np. w przemyśle chemicznym analizator składu substancji może wprowadzać opóźnienie pomiarowe),
- sterowania są silnie ograniczone (np. zawór ma nieliniowość typu nasycenia, a ponadto szybkość zmian jego otwarcia jest ograniczona ze względu na szybkość działania napędu),
- wyjście obiektu jest ograniczone (np. w otrzymywanym produkcie nie może zostać przekroczona pewna ilość zanieczyszczeń),
- istnieją silne interakcje w obiekcie wielowymiarowym (algorytmy predykcyjne mają właściwości odsprzęgające),
- można przewidzieć przyszłe zmiany wartości zadanej (np. w regulacji programowej),
- można przewidzieć zmiany ograniczeń (np. zależność od dostaw jakiejś substancji),
- można przewidzieć wpływ zakłóceń (działanie feedforward).

Jednym z pierwszych, jeśli nie pierwszym zastosowanym algorytmem predykcyjnym z przesuwającym horyzontem jest algorytm DMC [23, 88]. Algorytm ten został opracowany w latach 70–tych ubiegłego stulecia przez C.R. Cutler'a i B.L. Ramaker'a [23]. Wtedy też został zapoczątkowany szybki rozwój algorytmów predykcyjnych z przesuwającym horyzontem, trwający właściwie do dziś. Algorytm DMC w wersji konwencjonalnej z kwadratowym wskaźnikiem jakości występuje w dwóch odmianach: analitycznej oraz numerycznej, bazującej na rozwiązywaniu zadania optymalizacji kwadratowej z liniowymi ograniczeniami, w każdym kroku działania algorytmu.

## 2.2. Algorytmy DMC w wersji analitycznej i numerycznej

Niniejszy rozdział zawiera krótki opis obydwu postaci algorytmu DMC z omówieniem mechanizmów uwzględniania ograniczeń nałożonych na sygnały sterujące. Na bazie tych algorytmów zostały opracowane rozmyte algorytmy FDMC, omówione w rozdz. 3. W pierwszej kolejności został przedstawiony algorytm DMC w wersji analitycznej, wymagający, dzięki swojej prostocie, mniejszej mocy obliczeniowej. Drugą odmianą algorytmu DMC wykorzystuje jego sformułowanie w postaci zadania optymalizacji kwadratowej z ograniczeniami. Dzięki temu, wprowadzanie wszelkiego rodzaju ograniczeń jest stosunkowo łatwe, jednak kosztem rozwiązywania zadania optymalizacji w każdym kroku działania algorytmu.

### Algorytm regulacji DMC w wersji analitycznej

Charakterystyczną cechą algorytmu regulacji DMC jest wykorzystanie w nim modelu obiektu opartego na odpowiedzi skokowej i mającego postać:

$$y_k^M = a_1 \cdot \Delta u_{k-1} + \dots + a_{p_d} \cdot \Delta u_{k-p_d} + a_{p_d} \cdot \Delta u_{k-p_d-1} + \dots, \quad (2.3)$$

gdzie  $y_k^M$  – wyjście modelu obiektu w chwili  $k$ ,  $\Delta u_k$  – przyrost sterowania w chwili  $k$ ,  $a_i$  ( $i = 1, \dots, p_d$ ) są rzędnymi odpowiedzi skokowej obiektu, przy czym  $p_d$  jest tzw. horyzontem dynamiki obiektu [102] równym liczbie kroków dyskretyzacji, po której wartości rzędnych odpowiedzi skokowej obiektu regulacji można uznać za ustalone. Wówczas wartość rzędnej  $a_{p_d}$  jest przyjmowana równa lub bliska współczynnikowi wzmocnienia statycznego obiektu regulacji. W takim razie wzór (2.3) można zapisać w postaci:

$$y_k^M = \sum_{i=1}^{p_d-1} a_i \cdot \Delta u_{k-i} + a_{p_d} \cdot u_{k-p_d}, \quad (2.4)$$

gdzie  $u_{k-p_d}$  – wartość sterowania w chwili  $k-p_d$ .

W algorytmie DMC żądamy minimalizacji wskaźnika jakości:

$$J = \sum_{i=1}^p (y_k^{zad} - y_{k+i|k})^2 + \lambda \cdot \sum_{i=0}^{s-1} (\Delta u_{k+i|k})^2, \quad (2.5)$$

gdzie  $y_k^{zad}$  – wartość zadana (założono stałą na całym horyzoncie predykcji),  $\lambda \geq 0$  jest karą za zmienność sterowania, a  $y_{k+i|k}$  jest przewidywaną wartością wyjścia obiektu regulacji dla przyszłej chwili  $k+i$  zależną od przeszłych i przyszłych wartości sterowania i opisaną wzorem (wynikającym z przyjętego modelu obiektu):

$$y_{k+i|k} = \sum_{j=1}^i a_j \cdot \Delta u_{k-j+i} + \sum_{j=i+1}^{p_d-1} a_j \cdot \Delta u_{k-j+i} + a_{p_d} \cdot u_{k-p_d+i} + d_k. \quad (2.6)$$

Zauważmy, że w powyższym wzorze pierwsza suma zależy od przyszłych (jeszcze nieznanych) przyrostów sterowania, zaś reszta składników od przeszłości, przy czym  $d_k$  jest wartością zakłócenia w chwili  $k$ , tzn.  $d_k = y_k - y_{k-1}^M$ , gdzie  $y_k$  – wyjście obiektu w chwili  $k$ ;  $i = 1, \dots, p$ . W algorytmie DMC przyjmuje się, że wartość zakłócenia będzie taka sama w każdej chwili z horyzontu predykcji. Jest to charakterystyczną cechą algorytmu DMC, a taki model zakłócenia jest nazywany niekiedy modelem zakłócenia typu DMC. W takim razie, wzór (2.6) można przekształcić do postaci:

$$y_{k+i|k} = y_k + \sum_{j=i+1}^{p_d-1} a_j \cdot \Delta u_{k-j+i} + a_{p_d} \cdot \sum_{j=p_d}^{p_d+i-1} \Delta u_{k-j+i} - \sum_{j=1}^{p_d-1} a_j \cdot \Delta u_{k-j} + \sum_{j=1}^i a_j \cdot \Delta u_{k-j+i}. \quad (2.7)$$

Wzór (2.7) można także, wydzielając składniki zależne od przeszłości i składniki zależne od przyszłych przyrostów sterowania, zapisać w następujący sposób:

$$y_{k+i|k} = y_k + w_{k+i|k} + \Delta y_{k+i|k}, \quad (2.8)$$

gdzie  $y_k$  – bieżąca wartość wyjścia obiektu,  $w_{k+i|k}$  – składniki zależne od przeszłych przyrostów sterowania,  $\Delta y_{k+i|k}$  – składniki zależne od przyszłych (wyznaczanych) przyrostów sterowania. Składniki te mają postać, odpowiednio:

$$w = A_p \cdot \Delta u_p, \quad (2.9)$$

$$\Delta y = A \cdot \Delta u, \quad (2.10)$$

gdzie  $w = [w_{k+1|k}, \dots, w_{k+p|k}]^T$  – wektor złożony ze składników  $w_{k+i|k}$  zależnych od przeszłych przyrostów sterowania,  $\Delta u_p = [\Delta u_{k-1}, \dots, \Delta u_{k-p_d+1}]^T$  – przeszłe przyrosty sterowania,

$$A_p = \begin{bmatrix} a_2 - a_1 & a_3 - a_2 & \cdots & a_{p_d-1} - a_{p_d-2} & a_{p_d} - a_{p_d-1} \\ a_3 - a_1 & a_4 - a_2 & \cdots & a_{p_d} - a_{p_d-2} & a_{p_d} - a_{p_d-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{p+1} - a_1 & a_{p+2} - a_2 & \cdots & a_{p_d} - a_{p_d-2} & a_{p_d} - a_{p_d-1} \end{bmatrix}, \quad (2.11)$$

$\Delta y = [\Delta y_{k+1|k}, \dots, \Delta y_{k+p|k}]^T$  – wektor złożony ze składników  $\Delta y_{k+i|k}$  zależnych od przyszłych przyrostów sterowania,  $\Delta u = [\Delta u_{k|k}, \dots, \Delta u_{k+s-1|k}]^T$  – przyszłe (wyznaczane) przyrosty sterowania,  $A$  – macierz dynamiczna złożona ze współczynników odpowiedzi skokowej obiektu regulacji:

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_2 & a_1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_p & a_{p-1} & \cdots & a_{p-s+2} & a_{p-s+1} \end{bmatrix}. \quad (2.12)$$

Postać macierzy dynamicznej wynika z tego, że horyzont sterowania przyjmuje się mniejszy bądź równy horyzontowi predykcji ( $s \leq p$ ), przy czym często zakłada się, że jest on równy połowie horyzontu predykcji. Zwykle, zakłada się także, że horyzont predykcji jest równy horyzontowi dynamiki obiektu ( $p = p_d$ ) [90]. W taki właśnie sposób dobierano horyzonty w zamieszczonych w niniejszej pracy przykładach.

Reasumując, chcemy aby odchylenia wartości wyjściowej obiektu regulacji od wartości zadanej w przyszłych  $p$  chwilach były minimalne (pierwszy człon wskaźnika jakości) oraz aby sterowanie nie było zanadto zmienne (stąd wprowadzenie kary za przyrosty sterowania).

Jak wcześniej zauważono, we wzorze (2.8) można wydzielić dwie części: pierwszą zależną od przeszłości układu regulacji  $y_{k+i|k}^{sw} = y_k + w_{k+i|k}$  oraz drugą zależną od dopiero wyznaczanych sterowań  $\Delta y_{k+i|k}$ . Pierwszy z wymienionych członów jest nazywany odpowiedzią swo-

bodną, ponieważ takie byłyby wartości wyjścia obiektu regulacji, gdyby sygnały sterujące zostały w chwili  $k$  zamrożone.

Problem minimalizacji wskaźnika jakości (2.5) ma rozwiązanie analityczne, które jest dane wzorem:

$$\Delta \mathbf{u} = (\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A} + \lambda \cdot \mathbf{I})^{-1} \cdot \mathbf{A}^T \cdot (\mathbf{e} - \mathbf{w}), \quad (2.13)$$

gdzie  $\mathbf{I}$  – macierz jednostkowa,  $\mathbf{e} = [y_k^{zad} - y_k, \dots, y_k^{zad} - y_k]^T$  – wektor, którego składowe są równe uchybowi regulacji w bieżącej chwili.

Ponieważ do sterowania jest wykorzystywane tylko pierwsze z wyznaczonego ciągu sterowań, to interesuje nas jedynie pierwszy element wektora  $\Delta \mathbf{u}$  opisany zależnością:

$$\Delta u_k = \mathbf{B}_1 \cdot (\mathbf{e} - \mathbf{w}), \quad (2.14)$$

gdzie  $\mathbf{B}_1$  jest pierwszym wierszem macierzy  $\mathbf{B} = (\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A} + \lambda \cdot \mathbf{I})^{-1} \cdot \mathbf{A}^T$ .

Z powyższego wzoru wynika z kolei równość:

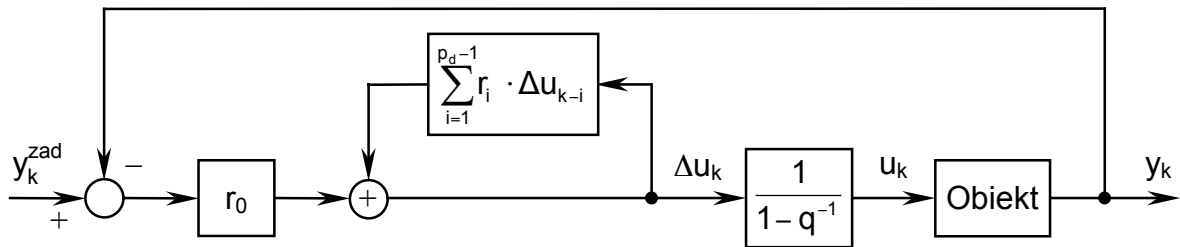
$$\Delta u_k = \sum_{i=1}^p b_{1i} \cdot (e_k - w_{k+i|k}), \quad (2.15)$$

gdzie  $b_{1i}$  – kolejne elementy pierwszego wiersza macierzy  $\mathbf{B}$ ,  $e_k$  – bieżący uchyb regulacji.

Następnie otrzymujemy:

$$\Delta u_k = r_0 \cdot e_k + \sum_{i=1}^{p_d-1} r_i \cdot \Delta u_{k-i}, \quad (2.16)$$

gdzie  $r_i$  ( $i = 0, \dots, p_d-1$ ) – współczynniki otrzymane po przekształceniu. Dzięki takiej postaci rozwiązania, jest możliwe określenie struktury regulatora. Schemat blokowy układu regulacji z regulatorem DMC opisanym wzorem (2.16) pokazano na rys. 2.2;  $q^{-1}$  jest opóźnieniem o jeden okres próbkowania  $T_p$ .



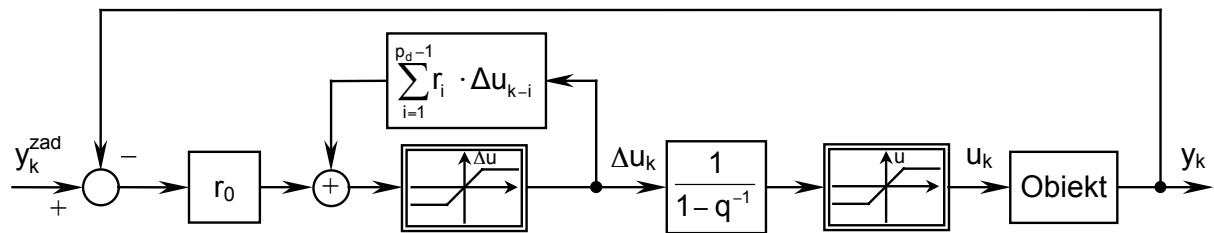
Rys. 2.2. Schemat blokowy układu regulacji z regulatorem DMC w wersji analitycznej

Pominięcie istnienia w układzie regulacji ograniczeń nałożonych na wartości sterowania lub wartości wyjścia obiektu regulacji podczas doboru regulatora, może mieć negatywne skutki dla działania układu regulacji. Dobrą ilustracją takiego przypadku jest przykład zamieszczony w pracach [65, 91] dotyczący regulacji dwuwymiarowej. Algorytm regulacji powinien więc dysponować mechanizmem uwzględniania ograniczeń. W przypadku regulatorów DMC w wersji analitycznej mechanizm ten jest stosunkowo prosty i polega na rzutowaniu sterowań na zbiór ograniczeń. Zasadę tę można zapisać w postaci:

$$\begin{aligned} \text{jeśli } \Delta u_k + u_{k-1} > u_{\max} \text{ to } \Delta u_k &= u_{\max} - u_{k-1}, \\ \text{jeśli } \Delta u_k + u_{k-1} < u_{\min} \text{ to } \Delta u_k &= u_{\min} - u_{k-1}; \end{aligned} \quad (2.17)$$

gdzie  $u_{\min}$ ,  $u_{\max}$  – ograniczenia dolne i górne sygnału sterującego. Zwróćmy uwagę na to, że mechanizm ten można w praktyce traktować, jako nakładanie odpowiednich ograniczeń na wyznaczany w danej chwili przyrost sygnału sterującego.

Powyższe ulepszenie algorytmu pomimo swojej prostoty, zapewnia poprawną pracę regulatora DMC nawet w przypadkach, gdy przed jego zastosowaniem wyniki działania regulatora były niedopuszczalne [66]. Ponadto, choć jego użycie nie daje w ogólności rozwiązania optymalnego, to w wielu przypadkach otrzymany rezultat jest bardzo zbliżony do optymalnego [102]. Sposób ten jest równoznaczny z wprowadzeniem nieliniowości typu nasycenia do wnętrza regulatora DMC. Schemat blokowy odpowiednio zmodyfikowanego układu regulacji pokazano na rys. 2.3. Zamieszczony na tym rysunku blok nieliniowy w regulatorze, należy traktować jako blok realizujący wszystkie potrzebne do jego działania funkcje, a w tym ustalanie w każdym kroku dolnego i górnego ograniczenia przyrostu sygnału sterującego (ponieważ praktycznie do tego sprowadza się uwzględnianie wszelkiego rodzaju ograniczeń).



Rys. 2.3. Schemat blokowy układu regulacji z ograniczeniami uwzględnionymi w regulatorze

Korzystając z podanej modyfikacji można również zapewnić spełnienie ograniczeń nałożonych na wyjście obiektu. Idea polega na takim ograniczeniu wartości sterowań, aby wyjścia obiektu nie mogły przekroczyć zadanych wartości, przy określonej niepewności modelowania (zob. rozdz. 5).

Algorytmy DMC wymagają dość dużych mocy obliczeniowych. Dlatego ich zastosowanie jest zwykle połączone z potrzebą użycia komputera (sugeruje to tytuł artykułu twórców oryginalnej wersji algorytmu). Dotyczy to w szczególności wersji algorytmu DMC opartej na jego sformułowaniu jako zadanie optymalizacji kwadratowej z ograniczeniami, znanym pod nazwą QDMC [32]. Jednak algorytm DMC w wersji analitycznej [65, 90, 91] pozwala ominąć to ograniczenie.

Sekret stosunkowo małych wymagań analitycznego algorytmu DMC kryje się w tym, że główna i najbardziej pracochłonna część obliczeń (wyznaczenie macierzy  $\mathbf{B}$ ) jest wykonywana raz (off-line). Następnie, w każdym kroku działania, regulator bazuje na uprzednio wyznaczonych współczynnikach i dlatego jest stosunkowo szybki i wymaga mniejszych mocy obliczeniowych niż algorytm DMC w wersji numerycznej. Ta cecha analitycznej odmiany algorytmu DMC pozwoliła na jego implementację na sterowniku PLC (zob. rozdz. 6.1).

### Algorytm regulacji DMC w wersji numerycznej

W przypadku potrzeby uwzględnienia ograniczeń istniejących w układzie regulacji, przy założeniu dysponowania wystarczającymi mocami obliczeniowymi, łatwiejsze w użyciu i bardziej naturalne jest podejście wykorzystujące sformułowanie algorytmu DMC w postaci zadania optymalizacji liniowo-kwadratowej. Podejście to polega na wyznaczaniu, w każdym kroku działania algorytmu, ciągu przyrostów sterowania, minimalizującego wskaźnik jakości:

$$\min_{\Delta u} \sum_{i=1}^p (y_k^{zad} - y_{k+i|k})^2 + \lambda \cdot \sum_{i=0}^{s-1} (\Delta u_{k+i|k})^2, \quad (2.18)$$

przy ograniczeniach:

$$\Delta \mathbf{u}_{\min} \leq \Delta \mathbf{u} \leq \Delta \mathbf{u}_{\max},$$

$$\mathbf{u}_{\min} \leq \mathbf{u} \leq \mathbf{u}_{\max},$$

$$\mathbf{y}_{\min} \leq \mathbf{y} \leq \mathbf{y}_{\max},$$

gdzie  $\Delta \mathbf{u} = [\Delta u_{k|k}, \dots, \Delta u_{k+s-1|k}]^T$  – wektor przyszłych (wyznaczanych) przyrostów sterowania,

$\mathbf{u} = \left[ u_{k-1} + \Delta u_{k|k}, \dots, u_{k-1} + \sum_{i=0}^{s-1} \Delta u_{k+i|k} \right]^T$  – wektor przyszłych wartości sterowania,

$\mathbf{y} = [y_{k+1|k}, \dots, y_{k+p|k}]^T$  – wektor, którego elementy  $y_{k+i|k}$  są przewidywanymi wartościami wyjścia obiektu regulacji dla przyszłych chwil, danymi wzorem (2.8),  $\Delta \mathbf{u}_{\min}$ ,  $\Delta \mathbf{u}_{\max}$ ,  $\mathbf{u}_{\min}$ ,  $\mathbf{u}_{\max}$ ,  $\mathbf{y}_{\min}$ ,  $\mathbf{y}_{\max}$  – wektory ograniczeń dolnych i górnych odpowiednio: przyrostów sterowania, wartości sterowania i wartości wyjścia obiektu regulacji.

Wskaźnik jakości z zadania (2.18), korzystając ze wzorów (2.8), (2.9) i (2.10) można zapisać w postaci:

$$\min_{\Delta \mathbf{u}} (\mathbf{A} \cdot \Delta \mathbf{u} - (\mathbf{e} - \mathbf{w}))^T \cdot (\mathbf{A} \cdot \Delta \mathbf{u} - (\mathbf{e} - \mathbf{w})) + \lambda \cdot \Delta \mathbf{u}^T \cdot \Delta \mathbf{u}, \quad (2.19)$$

gdzie oznaczenia przyjęto takie, jak w poprzednich wzorach.

W wyniku rozwiązania zadania (2.18) jest otrzymywany wektor przyszłych przyrostów sterowania. Z tego wektora jest wybierany pierwszy element i używany do regulacji. Następnie, w kolejnym kroku działania regulatora, ponownie jest rozwiązywane zadanie optymalizacji.

Przedstawione podejście ma zasadniczą zaletę. Można w nim w stosunkowo prosty sposób uwzględniać ograniczenia istniejące w układzie regulacji. Wadą tego podejścia jest konieczność rozwiązywania w każdym kroku działania algorytmu zadania optymalizacji.

### Uwzględnianie zakłócenia mierzalnego

Istotnym zagadnieniem, a jednocześnie dużą zaletą algorytmu DMC jest możliwość uwzględniania w nim zakłócenia mierzalnego, jak również przewidywanego. Przypomnijmy, że we wzorze (2.8) można wyodrębnić odpowiedź swobodną zależną od aktualnej wartości wyjścia oraz od składników określających wpływ poprzednich przyrostów sterowania. Jeśli chcemy uwzględnić wpływ zakłócenia, o którym mamy jakieś informacje (uzyskane na przykład dzięki zastosowaniu pomiaru pośredniego [11, 38, 39]), na rozważany obiekt, to wystarczy dodać do odpowiedzi swobodnej wyrazy opisujące ten wpływ.

Przyjmijmy model obiektu regulacji (2.3) rozszerzony o dodatkowe składniki zależne od przyrostów zakłócenia:

$$\begin{aligned} y_k^M = & a_1 \cdot \Delta u_{k-1} + a_2 \cdot \Delta u_{k-2} + \dots + a_{p_d} \cdot \Delta u_{k-p_d} + \dots \\ & + (a_z)_1 \cdot \Delta z_{k-1} + (a_z)_2 \cdot \Delta z_{k-2} + \dots + (a_z)_{p_z} \cdot \Delta z_{k-p_z} + \dots, \end{aligned} \quad (2.20)$$

gdzie  $(a_z)_i$  są rzędnymi odpowiedzi obiektu na skok zakłócenia (przyjęto model zakłócenia w postaci odpowiedzi skokowej),  $z_k$  – zakłócenie mierzalne,  $p_z$  – liczba kroków, po której można przyjąć, że wartości rzędnych odpowiedzi obiektu na skok zakłócenia są ustalone.

Zauważmy, że gdy w obiekcie są opóźnienia, to korzystniejsza sytuacja ma miejsce wtedy, gdy opóźnienie w torze zakłócenia jest większe od opóźnienia w torze sterowania, zaś mniej korzystna jest sytuacja odwrotna.

Ponieważ zakładamy, że znamy zarówno przeszłe, jak i przyszłe wartości przyrostów zakłócenia (potrafimy je przewidzieć), to składniki zależne od zakłócenia należy włączyć do składników  $w_{k+i|k}$  z odpowiedzi swobodnej:

$$w_{k+i|k} = \sum_{j=i+1}^{p_d-1} a_j \cdot \Delta u_{k-j+i} + a_{p_d} \cdot \sum_{j=p_d}^{p_d+i-1} \Delta u_{k-j+i} - \sum_{j=1}^{p_d-1} a_j \cdot \Delta u_{k-j} + \sum_{j=i+1}^{p_z-1} (a_z)_j \cdot \Delta z_{k-j+i} + (a_z)_{p_z} \cdot \sum_{j=p_z}^{p_z+i-1} \Delta z_{k-j+i} - \sum_{j=1}^{p_z-1} (a_z)_j \cdot \Delta z_{k-j} + \sum_{j=1}^i (a_z)_j \cdot \Delta z_{k-j+i|k} \quad (2.21)$$

W takim razie, zakłócenie mierzalne uwzględnia się tak, jak zależność wejście–wyjście, przy czym dodatkowo może się pojawić ostatni składnik. Jeśli weźmie się pod uwagę wyraz zależny od  $\Delta z_k$ , występujący w ostatniej sumie, to oznacza to natychmiastowy pomiar i uwzględnienie zakłócenia, natomiast wzięcie pod uwagę kolejnych składników oznacza uwzględnienie przyszłych przyrostów zakłócenia i wiąże się z koniecznością ich przewidzenia. Po tym zabiegu postępujemy tak, jak poprzednio. W przypadku algorytmu DMC w wersji analitycznej otrzymamy prawo regulacji:

$$u_k = u_{k-1} + r_0 \cdot e_k + \sum_{i=1}^{p_d-1} r_i \cdot \Delta u_{k-i} + \sum_{i=0}^{p_z-1} s_i \cdot \Delta z_{k-i} + \sum_{i=1}^{p-1} t_i \cdot \Delta z_{k+i|k}, \quad (2.22)$$

gdzie  $r_i$ ,  $s_i$ ,  $t_i$  są parametrami regulatora otrzymanymi w wyniku stosownych przekształceń,  $\Delta z_{k+i|k}$  – przyszłe, przewidywane w chwili  $k$  zmiany sygnału zakłócającego. W powyższym prawie regulacji można więc wyróżnić człony zależne od: ♦ bieżącego uchybu regulacji, ♦ poprzednich sterowań, ♦ bieżącej wartości i historii zakłócenia  $z_k$ , ♦ prognozy zakłócenia  $z_k$ .

### Algorytmy dla obiektów wielowymiarowych

Dużą zaletą algorytmu DMC jest możliwość jego zastosowania do regulacji obiektów wielowymiarowych. Informacjami o obiekcie potrzebnymi na etapie projektowania są odpowiedzi skokowe ze wszystkich torów wejście–wyjście. Warto przy tym zaznaczyć, że algorytm zapewnia odsprężanie obiektu regulacji, co wynika ze sposobu jego formułowania.

Załóżmy, że model obiektu regulacji jest opisany następującymi równaniami:

$$\mathbf{y}_k^M = \tilde{\mathbf{A}}_1 \cdot \Delta \mathbf{u}_{k-1} + \dots + \tilde{\mathbf{A}}_{p_d} \cdot \Delta \mathbf{u}_{k-p_d} + \tilde{\mathbf{A}}_{p_d} \cdot \Delta \mathbf{u}_{k-p_d-1} + \dots, \quad (2.23)$$

gdzie  $\mathbf{y}_k^M$  – wektor wyjść modelu obiektu w chwili  $k$ ,  $\Delta \mathbf{u}_k$  – wektor przyrostów sterowań (dla poszczególnych wejść) w chwili  $k$ ,  $\tilde{\mathbf{A}}_i$  ( $i = 1, \dots, p_d$ ) są macierzami złożonymi z rzędnych nr  $i$  odpowiedzi skokowych obiektu,  $p_d$  jest horyzontem dynamiki obiektu, przy czym należy założyć taką jego długość, aby w żadnym z torów nie stracić informacji o zachowaniu obiektu.

Przy takim modelu obiektu zmianie ulegnie macierz dynamiczna. Będzie ona złożona w tym przypadku z wielu pojedynczych macierzy dynamicznych (2.12) wiążących poszczególne wyjścia z poszczególnymi wejściami:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} & \dots & \mathbf{A}_{1l_{we}} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} & \dots & \mathbf{A}_{2l_{we}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{A}_{l_{wy}1} & \mathbf{A}_{l_{wy}2} & \dots & \mathbf{A}_{l_{wy}l_{we}} \end{bmatrix}, \quad (2.24)$$

gdzie  $A_{ij}$  – macierz dynamiczna wiążąca  $i$ -te wyjście z  $j$ -tym wejściem jak we wzorze (2.12),  $l_{we}$  – liczba wejść obiektu regulacji,  $l_{wy}$  – liczba wyjść obiektu regulacji. Podobną strukturę będzie też miała macierz opisująca wpływ sterowań z przeszłości:

$$A_p = \begin{bmatrix} (A_p)_{11} & (A_p)_{12} & \cdots & (A_p)_{1l_{we}} \\ (A_p)_{21} & (A_p)_{22} & \cdots & (A_p)_{2l_{we}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (A_p)_{l_{wy}1} & (A_p)_{l_{wy}2} & \cdots & (A_p)_{l_{wy}l_{we}} \end{bmatrix}, \quad (2.25)$$

gdzie  $(A_p)_{ij}$  – macierz wiążąca  $i$ -te wyjście z  $j$ -tym wejściem opisana wzorem (2.11). Odpowiednim zmianom ulegną także wektory ze wzoru (2.13), które są złożone z wektorów takich, jak w przypadku jednowymiarowym (dla jasności omówienia zostaną one tutaj przedstawione, ponieważ na ich podstawie, można łatwiej zrozumieć strukturę wyżej przedstawionych macierzy):

$$\Delta y = \left[ \Delta y_{k+1|k}^1, \dots, \Delta y_{k+p|k}^1, \Delta y_{k+1|k}^2, \dots, \Delta y_{k+p|k}^2, \dots, \Delta y_{k+1|k}^{l_{wy}}, \dots, \Delta y_{k+p|k}^{l_{wy}} \right]^T,$$

$$e = \left[ \underbrace{y_{zad}^1 - y_k^1, \dots, y_{zad}^1 - y_k^1}_{p \text{ elementów}}, \underbrace{y_{zad}^2 - y_k^2, \dots, y_{zad}^2 - y_k^2}_{p \text{ elementów}}, \dots, \underbrace{y_{zad}^{l_{wy}} - y_k^{l_{wy}}, \dots, y_{zad}^{l_{wy}} - y_k^{l_{wy}}}_{p \text{ elementów}} \right]^T,$$

$$\Delta u = \left[ \Delta u_{k|k}^1, \dots, \Delta u_{k+s-1|k}^1, \Delta u_{k|k}^2, \dots, \Delta u_{k+s-1|k}^2, \dots, \Delta u_{k|k}^{l_{we}}, \dots, \Delta u_{k+s-1|k}^{l_{we}} \right]^T,$$

$$\Delta u_p = \left[ \Delta u_{k-1}^1, \dots, \Delta u_{k-p_d+1}^1, \Delta u_{k-1}^2, \dots, \Delta u_{k-p_d+1}^2, \dots, \Delta u_{k-1}^{l_{we}}, \dots, \Delta u_{k-p_d+1}^{l_{we}} \right]^T.$$

Postać wektora  $w$  można wyznaczyć na podstawie macierzy  $A_p$  ze wzoru (2.25) oraz wektora  $\Delta u_p$ , korzystając ze wzoru (2.9). Przedstawione macierze i wektory wystarczy następnie podstawić, w przypadku wersji analitycznej algorytmu do wzoru (2.13) i zastosować przekształcenia analogiczne do przedstawionych w pierwszej części rozdz. 2.2, a w przypadku wersji numerycznej algorytmu DMC – do wzoru (2.19) i rozwiązaniu otrzymanego problemu optymalizacji.

### 2.3. Inne odmiany algorytmów predykcyjnych z przesuwającym horyzontem

Od początku pojawienia się algorytmów predykcyjnych z przesuwającym horyzontem, zostało opracowanych wiele ich odmian mniej lub bardziej różniących się od siebie. Jednym z pierwszych był algorytm MPHIC (Model Predictive Heuristic Control) znany też pod nazwą MAC (Model Algorithmic Control) [93], który pojawił się właściwie równolegle z algorytmem DMC. Jego główną różnicą w stosunku do algorytmu DMC jest wykorzystywanie do predykcji modelu w postaci odpowiedzi impulsowej obiektu (co umożliwia zastosowanie algorytmu w przypadku obiektów z całkowaniem), a nie skokowej, jak w przypadku algorytmu DMC. Warto jednak zaznaczyć, że obie odpowiedzi są ze sobą ściśle powiązane, a sformułowania obydwu algorytmów znacznie do siebie podobne.

Szerszą klasę obiektów regulacji (także niestabilnych) można opisać za pomocą równań różnicowych:

$$y_{k+1}^M = b_1 \cdot y_k + b_2 \cdot y_{k-1} + \dots + b_n \cdot y_{k-n+1} + c_1 \cdot u_k + c_2 \cdot u_{k-1} + \dots + c_m \cdot u_{k-m+1}, \quad (2.26)$$



gdzie  $b_1, \dots, b_n, c_1, \dots, c_m$  – parametry modelu obiektu. Do algorytmów wykorzystujących tego typu opis obiektu należą co najmniej trzy, przy czym powstały one z myślą o zastosowaniu w regulacji adaptacyjnej. Najbardziej popularnym spośród nich jest algorytm GPC (Generalized Predictive Control). Oprócz wspomnianego modelu obiektu zakłada się w nim model zakłócenia typu scałkowanego szumu kolorowego [19, 20, 21]. Rzadziej wspomnianymi algorytmami z modelem obiektu typu (2.26) są EPSAC (Extended Prediction Self Adaptive Control) oraz EHAC (Extended Horizon Adaptive Control) [14]. Cechą charakterystyczną algorytmu EPSAC jest przyjęcie w nim horyzontu sterowania równego 1. Ciekawym rozwiązaniem jest także wprowadzenie do wskaźnika jakości (2.1) rozłożonych wykładniczo wag dla poszczególnych uchybów w przyszłości, tzn.:

$$\kappa_i = C^{p-i}, i = 1, \dots, p.$$

Przyjęcie w tym przypadku współczynnika  $C < 1$  prowadzi do uzyskania wolniejszych odpowiedzi i spokojnego sterowania, zaś  $C > 1$  – do uzyskania szybszych odpowiedzi i bardziej gwałtownego sterowania.

Najczęściej stosowanym, w obecnie opracowywanych algorytmach, opisem obiektu dla regulatorów predykcyjnych jest model w postaci równań stanu. Tego typu algorytmy są rozważane w szczególności w publikacjach dotyczących analizy bądź zapewniania stabilności układów regulacji z regulatorami predykcyjnymi (rozdz. 4). Jednym z pierwszych algorytmów bazujących na tego typu modelach był SMOC [102]. Interesującym algorytmem wykorzystującym stanowy model obiektu jest PFC (Predictive Functional Control) [14, 53]. Zaproponowano w nim, aby rozważać i uwzględniać we wskaźniku jakości (2.1) tylko niektóre punkty z horyzontu predykcji (odpowiada to przyjęciu niektórych współczynników ważących  $\kappa_i = 0$ ), co oznacza, że żądamy, aby przyszłe wartości wyjścia były bliskie trajektorii zadanej nie na całym horyzoncie predykcji, ale tylko w wybranych punktach (ang. coincidence points). Drugim interesującym elementem tego algorytmu jest wyznaczanie sterowań na podstawie bazy funkcyjnej. Polega ono na obliczeniu wag dla poszczególnych funkcji z bazy. Taki mechanizm umożliwia wyznaczenie stosunkowo skomplikowanego przebiegu przyszłych sterowań, na długim horyzoncie, przy konieczności obliczenia małej liczby parametrów (wag dla poszczególnych funkcji z bazy).

Na tych algorytmach zakończymy wstępny przegląd algorytmów predykcyjnych z modelami liniowymi. Kolejnym krokiem w rozwoju tych algorytmów było wprowadzanie do nich modyfikacji zapewniających stabilność układów regulacji, w których są używane. Omówienie algorytmów z tego typu modyfikacjami zostało zamieszczone w rozdz. 4.

Ze względu na przyjęty w algorytmie DMC model obiektu, nie można tego algorytmu zastosować bezpośrednio do niestabilnych obiektów regulacji. W takiej sytuacji najczęściej albo wstępnie stabilizuje się obiekt regulacji poprzez uprzednie zastosowanie sprzężenia zwrotnego i do tak zmodyfikowanego obiektu stosowany jest algorytm DMC w wersji konwencjonalnej [25, 83, 89], albo wykorzystuje się inny model obiektu regulacji, np. w postaci równań stanu lub równania różnicowego (2.26).

Teraz zostanie zaprezentowane wyprowadzenie algorytmu predykcyjnego z modelem obiektu regulacji w postaci równania różnicowego przeprowadzone w sposób analogiczny do wyprowadzenia algorytmu DMC. Nie wykorzystuje się więc w nim ani tożsamości Bezout ani równania diofantycznego, a jedynie przekształca się odpowiednio model obiektu. Ponadto przyjęto taki sam, jak w klasycznym algorytmie DMC model zakłócenia.

## 2.4. Wyprowadzenie algorytmu predykcyjnego z modelem w postaci równania różnicowego

Założmy, że obiekt regulacji jest opisany równaniem różnicowym (2.26) i przepisujemy je dla chwili  $k$ :

$$y_k^M = b_1 \cdot y_{k-1} + b_2 \cdot y_{k-2} + \dots + b_n \cdot y_{k-n} + c_1 \cdot u_{k-1} + c_2 \cdot u_{k-2} + \dots + c_m \cdot u_{k-m}. \quad (2.27)$$

Przewidywana, w chwili  $k$ , wartość wyjścia dla chwili  $k+1$ , będzie opisana wzorem:

$$y_{k+1|k} = b_1 \cdot y_k + b_2 \cdot y_{k-1} + \dots + b_n \cdot y_{k-n+1} + c_1 \cdot u_k + c_2 \cdot u_{k-1} + \dots + c_m \cdot u_{k-m+1} + d_k, \quad (2.28)$$

gdzie  $d_k$  jest zakłóceniem typu DMC, czyli zakładamy, że jest ono stałe na całym horyzoncie predykcji i wynosi  $d_k = y_k - y_k^M$ .

Na podstawie wzorów (2.27) i (2.28) można napisać:

$$y_{k+1|k} = y_k + b_1 \cdot (y_k - y_{k-1}) + b_2 \cdot (y_{k-1} - y_{k-2}) + \dots + b_n \cdot (y_{k-n+1} - y_{k-n}) + c_1 \cdot (u_k - u_{k-1}) + c_2 \cdot (u_{k-1} - u_{k-2}) + \dots + c_m \cdot (u_{k-m+1} - u_{k-m}). \quad (2.29)$$

Następnie, po pogrupowaniu składników ze wzoru (2.29) i skorzystaniu  $m$  razy z zależności:

$$\Delta u_k = u_k - u_{k-1}, \quad (2.30)$$

otrzymamy:

$$y_{k+1|k} = (b_1 + 1) \cdot y_k + (b_2 - b_1) \cdot y_{k-1} + \dots + (b_n - b_{n-1}) \cdot y_{k-n+1} - b_n \cdot y_{k-n} + c_1 \cdot \Delta u_k + c_2 \cdot \Delta u_{k-1} + \dots + c_m \cdot \Delta u_{k-m+1}. \quad (2.31)$$

Dzięki powyższym przekształceniom, we wzorze (2.31) występują jedynie składniki zależne od wartości wyjścia w bieżącej i poprzednich chwilach oraz od przeszłych przyrostów sterowania. W celu uproszczenia zapisu, przedstawimy zależność (2.31) w nieco innej formie, wprowadzając nowe oznaczenia parametrów:

$$y_{k+1|k} = g_1 \cdot y_k + g_2 \cdot y_{k-1} + \dots + g_n \cdot y_{k-n+1} + g_{n+1} \cdot y_{k-n} + c_1 \cdot \Delta u_k + c_2 \cdot \Delta u_{k-1} + \dots + c_m \cdot \Delta u_{k-m+1}, \quad (2.32)$$

$$\text{gdzie } g_j = \begin{cases} b_1 + 1; & j = 1 \\ b_j - b_{j-1}; & j \geq 2, j \leq n. \\ -b_n; & j = n + 1 \end{cases}$$

Zwróćmy uwagę na to, że gdyby zastosować wzór (2.32) do predykcji wartości wyjścia obiektu regulacji w dalszych niż  $k+1$  chwilach, to we wzorze pojawiłyby się składniki zależne od jeszcze nieznanymi, przyszłych wartości wyjścia obiektu. Dlatego też, aby móc przewidzieć wartości wyjścia w dalszej przyszłości, dokonuje się opisanych dalej przekształceń.

W przypadku predykcji dla chwili  $k+2$ , najpierw należy skorzystać ze wzoru (2.28), odejmując stronami wzory dla chwili  $k+2$  i chwili  $k+1$ . Ponieważ przyjęto model zakłócenia typu DMC, składniki  $d_k$  ulegną skróceniu i otrzyma się:

$$y_{k+2|k} = (b_1 + 1) \cdot y_{k+1|k} + (b_2 - b_1) \cdot y_k + \dots + (b_n - b_{n-1}) \cdot y_{k-n+2} - b_n \cdot y_{k-n+1} + c_1 \cdot \Delta u_{k+1} + c_2 \cdot \Delta u_k + \dots + c_m \cdot \Delta u_{k-m+2}. \quad (2.33)$$

Powyższy wzór, używając oznaczeń wprowadzonych we wzorze (2.32), można zapisać jako:

$$y_{k+2|k} = g_1 \cdot y_{k+1|k} + g_2 \cdot y_k + \dots + g_n \cdot y_{k-n+2} + g_{n+1} \cdot y_{k-n+1} + \\ + c_1 \cdot \Delta u_{k+1} + c_2 \cdot \Delta u_k + \dots + c_m \cdot \Delta u_{k-m+2}. \quad (2.34)$$

Następnie do równania (2.34) należy podstawić wartość wyjścia przewidywaną dla chwili  $k+1$ , daną wzorem (2.32). Po tym zabiegu i pogrupowaniu wyrazów, otrzyma się:

$$y_{k+2|k} = (g_1 \cdot g_1 + g_2) \cdot y_k + (g_1 \cdot g_2 + g_3) \cdot y_{k-1} + \dots + (g_1 \cdot g_n + g_{n+1}) \cdot y_{k-n+1} + g_1 \cdot g_{n+1} \cdot y_{k-n} + \\ + c_1 \cdot \Delta u_{k+1} + (g_1 \cdot c_1 + c_2) \cdot \Delta u_k + \dots + (g_1 \cdot c_{m-1} + c_m) \cdot \Delta u_{k-m+2} + g_1 \cdot c_m \cdot \Delta u_{k-m+1}. \quad (2.35)$$

Wzór (2.35) można także zapisać w postaci analogicznej do wzoru (2.32), tzn.:

$$y_{k+2|k} = g_1^1 \cdot y_k + g_2^1 \cdot y_{k-1} + \dots + g_n^1 \cdot y_{k-n+1} + g_{n+1}^1 \cdot y_{k-n} + \\ + c_1 \cdot \Delta u_{k+1} + c_1^1 \cdot \Delta u_k + \dots + c_{m-1}^1 \cdot \Delta u_{k-m+2} + c_m^1 \cdot \Delta u_{k-m+1}, \quad (2.36)$$

$$\text{gdzie } g_j^1 = \begin{cases} g_1 \cdot g_j + g_{j+1}; & j \geq 1, j \leq n \\ g_1 \cdot g_j; & j = n+1 \end{cases}, \quad c_j^1 = \begin{cases} g_1 \cdot c_j + c_{j+1}; & j \geq 1, j \leq m-1 \\ g_1 \cdot c_j; & j = m \end{cases}.$$

Następnie zależność (2.36) przepisuje się dla kolejnej chwili, a za wartość wyjścia w chwili  $k+1$  podstawia się znowu wzór (2.32). Po tym podstawieniu otrzymamy wzór analogiczny do (2.35). Procedurę tę powtarzamy dla dalszych chwil z horyzontu predykcji. Przewidywane wartości wyjścia w przyszłych chwilach będą więc dane wzorem:

$$y_{k+i|k} = g_1^{i-1} \cdot y_k + g_2^{i-1} \cdot y_{k-1} + \dots + g_n^{i-1} \cdot y_{k-n+1} + g_{n+1}^{i-1} \cdot y_{k-n} + \\ + \sum_{l=0}^{i-1} c_1^l \cdot \Delta u_{k-l+i-1} + c_2^{i-1} \cdot \Delta u_{k-1} + \dots + c_{m-1}^{i-1} \cdot \Delta u_{k-m+2} + c_m^{i-1} \cdot \Delta u_{k-m+1}. \quad (2.37)$$

$$\text{gdzie } g_j^i = \begin{cases} g_1^{i-1} \cdot g_j + g_{j+1}^{i-1}; & j \geq 1, j \leq n \\ g_1^{i-1} \cdot g_j; & j = n+1 \end{cases}, \quad c_j^i = \begin{cases} g_1^{i-1} \cdot c_j + c_{j+1}^{i-1}; & j \geq 1, j \leq m-1 \\ g_1^{i-1} \cdot c_j; & j = m \end{cases}, \quad i = 1, \dots, p,$$

$$g_j^0 = g_j, \quad c_j^0 = c_j.$$

W wyniku przekształceń, otrzymamy model o żądanej postaci, złożony ze składników zależnych od przyrostów sterowania oraz ze składników zależnych od wartości wyjścia obiektu regulacji w przeszłych chwilach.

Jeśli chcemy zastosować algorytm w wersji z optymalizacją, to równania (2.37) należy wykorzystać podczas formułowania zadania optymalizacji liniowo-kwadratowej (2.18). Jeśli chcemy zaprojektować regulator w wersji analitycznej, to należy zastosować odpowiednie przekształcenia (analogiczne do opisanych w rozdz. 2.2) i skorzystać ze wzoru (2.13).

W takim razie, tak samo, jak w przypadku algorytmu DMC, potrzebujemy znać: macierz dynamiczną  $\mathcal{A}$ , wektor uchybu  $e$  (jego postać jest oczywista i nie wymaga komentarza) i wektor opisujący wpływ przeszłości  $w$ .

Zauważmy, że współczynniki  $c_1^l$ ;  $l = 0, \dots, p-1$ , które znajdują się w składnikach zależnych od przyszłych przyrostów sterowania, są równe rzędnym odpowiedzi skokowej obiektu regulacji. W takim razie, macierz dynamiczna będzie taka sama, jak w algorytmie DMC, czyli:

$$A = \begin{bmatrix} c_1^0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ c_1^1 & c_1^0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ c_1^{p-1} & c_1^{p-2} & \dots & c_1^{p-s+1} & c_1^{p-s} \end{bmatrix}. \quad (2.38)$$

Zmianie uległy elementy wektora  $w$ . Tym razem każdy z nich jest złożony z wyrazów zależnych nie tylko od wartości przyrostów sterowania, ale także od wartości wyjścia obiektu regulacji z przeszłości. Elementy tego wektora są dane wzorem:

$$w_{k+i|k} = (g_1^{i-1} - 1) \cdot y_k + g_2^{i-1} \cdot y_{k-1} + \dots + g_{n+1}^{i-1} \cdot y_{k-n} + c_2^{i-1} \cdot \Delta u_{k-1} + \dots + c_m^{i-1} \cdot \Delta u_{k-m+1}. \quad (2.39)$$

W dalszej kolejności, jeśli chcemy zastosować algorytm w wersji z optymalizacją, to wystarczy w każdym kroku algorytmu obliczyć wartości elementów wektora  $w$  i rozwiązać zadanie optymalizacji liniowo–kwadratowej. W przypadku projektowania algorytmu w wersji analitycznej, należy wykonać jeszcze jeden krok.

Mając dane wzory opisujące elementy wektora  $w$ , można obliczyć współczynniki regulatora analogicznie, jak w przypadku algorytmu DMC. Tym razem jednak, w prawie regulacji wystąpią nie tylko składniki zależne od bieżącego uchybu oraz przeszłych przyrostów sterowania (tych składników jest tym razem mniej), ale także składniki zależne od wartości wyjścia obiektu regulacji w przeszłych chwilach. W takim razie, ponieważ stosowany będzie tylko pierwszy spośród przyrostów sterowania, wyznaczonych ze wzoru (2.13) oraz ponieważ macierz dynamiczna  $A$  opisana wzorem (2.38) nie zmienia się, to po pomnożeniu wektora  $(e-w)$  przez pierwszy wiersz macierzy  $(A^T \cdot A + \lambda \cdot I)^{-1} \cdot A^T$  ze wzoru (2.13) i wykonaniu odpowiednich przekształceń, otrzymamy:

$$\Delta u_k = r_e \cdot e_k + \sum_{j=1}^{m-1} r_u^j \cdot \Delta u_{k-j} + \sum_{j=1}^{n+1} r_y^j \cdot y_{k-j+1}, \quad (2.40)$$

gdzie  $r_e, r_u^1, \dots, r_u^{m-1}, r_y^1, \dots, r_y^{n+1}$  – współczynniki regulatora.

Zauważmy, że zalety analitycznej wersji algorytmu pozostały, ponieważ macierz  $(A^T \cdot A + \lambda \cdot I)^{-1} \cdot A^T$  ze wzoru (2.13) wystarczy obliczyć raz, tak samo, jak współczynniki we wzorach (2.39) opisujących elementy wektora  $w$ .

## 2.5. Algorytmy predycyjne z powtarzaną linearyzacją dla obiektów nieliniowych

Zastosowanie algorytmów predycyjnych dla obiektów nieliniowych, jeśli dysponuje się nieliniowym modelem procesu może wydawać się proste, ponieważ podstawowe sformułowanie zadania jest takie samo, jak w przypadku algorytmów wykorzystujących modele liniowe (taki sam wskaźnik jakości i takie same ograniczenia). Publikacji opisujących tego typu podejście powstało stosunkowo dużo; przykłady algorytmów predycyjnych z optymalizacją nieliniową, wykorzystujących modele Takagi–Sugeno można znaleźć np. w [2, 3, 28, 29, 30].

Niestety, użycie modelu nieliniowego sprawia, że zamiast wypukłego zadania programowania kwadratowego otrzymuje się problem optymalizacji nieliniowej, który w ogólności nie jest wypukły i należy go rozwiązywać w każdym kroku algorytmu. Wtedy jednak, zapotrzebowanie na moc obliczeniową przy rozwiązywaniu problemu on–line może być zbyt duże, aby można było dokonać praktycznej implementacji algorytmu opartego na dokładnej optymalizacji. Ponadto należy zauważyć, że w takiej sytuacji nie ma gwarancji znalezienia rozwiązania zadania optymalizacji w przewidywalnym czasie, ani gwarancji znalezienia ekstremum globalnego.

Dlatego pojawiły się algorytmy korzystające z linearyzacji tak, aby zamiast zadania optymalizacji nieliniowej, w każdym kroku działania algorytmu wystarczyło rozwiązać zadanie wypukłej optymalizacji kwadratowej. Co więcej, pomimo trudności z analizą teoretyczną układów regulacji z tymi algorytmami, a w szczególności z zapewnieniem stabilności tych układów, jak twierdzą Morari i Lee [75] „... linearyzacja jest jedyną metodą która znalazła szersze zastosowanie w przemyśle wychodzące poza projekty demonstracyjne.” Ponadto „...nie ma przykładów potwierdzających w przekonujący sposób, że rozwiązywanie problemów nieliniowej optymalizacji on-line jest jasno uzasadnione...”. Warto tutaj zaznaczyć, że do zastosowania podejść polegających na wyznaczaniu modelu liniowego w każdym kroku, szczególnie dobrze nadają się algorytmy wykorzystujące modele Takagi–Sugeno. Struktura tych modeli implikuje bowiem możliwość wyznaczania modelu liniowego w stosunkowo prosty i naturalny sposób.

Najprostsze spośród podejść z sukcesywną linearyzacją polega na jej dokonywaniu w każdym kroku algorytmu. Następnie, na podstawie otrzymanego modelu liniowego, jest formułowany konwencjonalny algorytm predykcyjny. Przykłady wykorzystania tego podejścia, także te, korzystające z zalet modeli rozmytych typu TS, można znaleźć m.in. w [1, 37, 47, 56, 60, 67, 73, 98, 104]. Metoda ta, choć gwarantuje otrzymanie sterowań w przewidywalnym czasie, może nie być wystarczająca w przypadku silniej nieliniowych obiektów regulacji.

Do algorytmu można jednak wprowadzić pewną modyfikację umożliwiającą otrzymanie lepszych rezultatów. Polega ona na wyznaczeniu odpowiedzi obiektu regulacji na uprzednio otrzymane sterowania na podstawie modelu nieliniowego [31, 33, 49, 50, 60, 67, 73, 79, 80]. Natomiast w celu otrzymania macierzy dynamicznej i przewidzenia wpływu wyznaczanych sterowań na zachowanie procesu, można zastosować model liniowy otrzymany w bieżącej chwili tak, jak w poprzednim podejściu. Można także, w razie potrzeby, użyć bardziej złożonego sposobu generacji macierzy dynamicznej, na przykład na podstawie modeli liniowych otrzymanych w wyniku linearyzacji modelu nieliniowego wzdłuż trajektorii przewidywanej [49, 50, 60, 67]. Wielokrotna linearyzacja w jednym kroku algorytmu została także użyta w pracy [10]. Jeśli zachodzi taka potrzeba, w celu poprawienia jakości regulacji, rozwiązywanie zadania optymalizacji w danym kroku działania regulatora może być powtarzane w połączeniu z uaktualnianiem predykcji; takie usprawnienie algorytmów zaproponowano np. w [49, 50, 79, 102].

Warto wspomnieć także o podejściu z pracy [84]. Zaproponowano tam wprowadzenie do sformułowania algorytmu dodatkowego zakłócenia mającego uwzględniać różnice pomiędzy wyjściami modelu liniowego przyjętego do predykcji a wyjściami modelu nieliniowego. Metoda ta jest jednak w praktyce równoważna wprowadzeniu odpowiednich modyfikacji do odpowiedzi obiektu na sterowania otrzymane w poprzednich krokach działania regulatora [79].

Wymienione podejścia zostaną dokładnie przedstawione w rozdz. 3, w kontekście omawiania algorytmów wykorzystujących modele rozmyte Takagi–Sugeno, których dotyczy niniejsza praca. Tutaj warto jeszcze wspomnieć o pewnych istotnych aspektach związanych z użyciem algorytmów z linearyzacją.

W publikacjach na temat algorytmów predykcyjnych z linearyzacją, a w szczególności tych wykorzystujących modele TS, brakuje zadowalającego ustosunkowania do zagadnień badania stabilności lub zapewniania stabilności układów regulacji z tymi algorytmami. W rozdz. 4 opisano opracowane przez autora metody rozwiązania tych problemów. Przedstawiono więc sposób badania stabilności układów regulacji z rozmytymi regulatorami predykcyjnymi w wersji analitycznej, a także metodę takiego formułowania rozmytych algorytmów predykcyjnych w wersji numerycznej, aby zapewnić stabilność układów regulacji z tymi algorytmami.

Drugim istotnym zagadnieniem jest uwzględnianie w algorytmie predykcyjnym ograniczeń. Uwzględnianie ograniczeń nałożonych na sygnał sterujący jest właściwie oczywiste, ze względu na sposób formułowania algorytmów predykcyjnych i wiele jest publikacji poruszających problem wyłącznie ograniczeń wartości i szybkości zmian sterowań lub też takich, w których rozważa się ograniczenia wyjść modelu obiektu regulacji (z pominięciem istnienia niepewności modelowania).

Zdecydowanie trudniejszym problemem jest uwzględnianie ograniczeń nałożonych na wartości wyjść obiektu regulacji (w szczególności wyjść nieregulowanych), ze względu na niedokładność modelowania. Warto zwrócić uwagę na to, że istotnym problemem, w przypadku algorytmów rozważanych w niniejszej pracy, jest konieczność wprowadzania ograniczeń liniowych, aby w celu wyznaczenia sterowań wystarczyło rozwiązać zadanie programowania liniowo–kwadratowego. W rozdz. 5 przedstawiono metody uwzględniania, w rozmytych algorytmach predykcyjnych, ograniczeń nałożonych na wyjścia obiektu regulacji, z wzięciem pod uwagę niepewności modelowania.

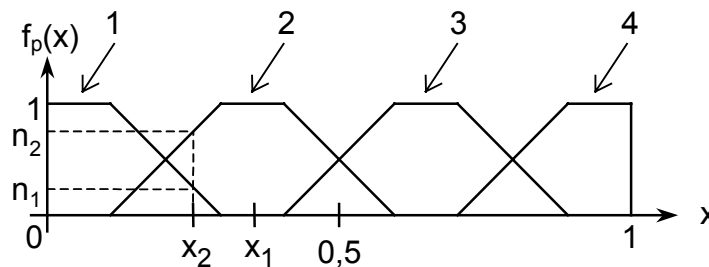
### 3. Opis struktur rozmytych algorytmów predykcyjnych z przesuwającym horyzontem

#### 3.1. Opis struktury i właściwości modeli Takagi–Sugeno

Poprzedni rozdział zawiera krótki opis algorytmów predykcyjnych (m.in. obydwu odmian algorytmu DMC), które do predykcji wykorzystują liniowe modele procesów. Drugim elementem użytym w algorytmach, których dotyczy niniejsza praca, są nieliniowe modele rozmyte typu Takagi–Sugeno [99], które zostaną teraz przedstawione.

Modele Takagi–Sugeno (w skrócie TS) wykorzystują ideę logiki rozmytej, która cieszy się dużym zainteresowaniem od lat 80-tych ubiegłego stulecia aż do tej pory. Dokładne i szerokie omówienie zagadnień związanych z logiką rozmytą można znaleźć m.in. w [27, 85, 107]. Interesująca jest także praca zbiorcza na temat identyfikacji modeli rozmytych [36]. Tutaj skoncentrujemy się na omówieniu jedynie modeli Takagi–Sugeno od strony ich zastosowania w opracowanych algorytmach, opisanych w dalszej części rozdziału.

Zacznijmy od omówienia podstawowej cechy logiki rozmytej. W logice konwencjonalnej dany element może należeć do zbioru lub nie, tym sytuacjom odpowiadają wartości logiczne odpowiednio: 1 lub 0. Natomiast w logice rozmytej przynależność elementu do zbioru może być określona za pomocą wartości z przedziału [0, 1]. Do opisu tej sytuacji są stosowane tzw. funkcje przynależności (ang. membership functions). Mechanizm ten najlepiej jest wyjaśnić na przykładzie.



Rys. 3.1. Przykładowe funkcje przynależności

Na rys. 3.1 pokazano przykładowe funkcje przynależności, które definiują tzw. stopień przynależności (ang. degree of membership) zmiennej  $x \in [0, 1]$  do czterech zbiorów rozmytych. Punkt  $x_1 = 0,35$  należy do zbioru 2 ze stopniem przynależności 1, a do pozostałych trzech zbiorów ze stopniem przynależności 0. Z kolei punkt  $x_2 = 0,25$  należy do zbioru 1 ze stopniem przynależności  $n_1$ , a do zbioru 2 ze stopniem przynależności  $n_2$ .

W przykładzie przyjęto trapezowe funkcje przynależności. Można także stosować funkcje o innych kształtach. Trójkątne funkcje przynależności są szczególnym przypadkiem funkcji trapezowych. Zastosowanie funkcji prostokątnych odpowiada zbiorowi konwencjonalnemu nazywanemu w logice rozmytej zbiorem ostrym (ang. crisp set). W przypadku, gdy są potrzebne funkcje różniczkowalne, stosuje się funkcje sigmoidalne oraz dzwonowe [85, 102].

Modele rozmyte TS są złożone ze zbioru reguł (nazywanego też bazą wiedzy). W niniejszej pracy będą wykorzystywane modele złożone z reguł następującego typu:

Reguła  $i$ : jeśli  $y_k$  jest  $B_1^i$  i ... i  $y_{k-n_p+1}$  jest  $B_{n_p}^i$  i  $u_k$  jest  $C_1^i$  i ... i  $u_{k-m_p+1}$  jest  $C_{m_p}^i$  to

$$y_{k+1} = b_1^i \cdot y_k + \dots + b_{n_p}^i \cdot y_{k-n_p+1} + c_1^i \cdot u_k + \dots + c_{m_p}^i \cdot u_{k-m_p+1}, \quad (3.1)$$

gdzie  $b_1^i, \dots, b_{n_B}^i, c_1^i, \dots, c_{m_C}^i$  – współczynniki  $i$ -tego modelu lokalnego,  $y_k$  – wyjście obiektu regulacji w chwili  $k$ ,  $u_k$  – sterowanie w chwili  $k$ ,  $B_1^i, \dots, B_{n_p}^i, C_1^i, \dots, C_{m_p}^i$  – zbiory rozmyte,  $i = 1, \dots, l$ ,  $l$  – liczba reguł.

Cechą charakterystyczną modeli Takagi–Sugeno jest to, że są one uogólnieniem modeli liniowych i dlatego są niekiedy nazywane modelami quasi–liniowymi. Wynika to bezpośrednio ze struktury tych modeli, ponieważ następnikami są w nich najczęściej modele liniowe (choć możliwe jest zastosowanie modeli nieliniowych). Zastosowanie funkcji jako następnika sprawia, że za pomocą modeli Takagi–Sugeno można opisać stosunkowo skomplikowaną dynamikę przy użyciu relatywnie małej liczby reguł. Modele będące następnikami reguł będą nazywane modelami lokalnymi. W niniejszej pracy będą wykorzystywane modele lokalne typu wejście–wyjście.

W celu obliczenia wartości wyjściowej modelu, należy dokonać tzw. wnioskowania rozmytego (ang. fuzzy reasoning). W przypadku rozpatrywanego modelu polega ono na określeniu dla każdej reguły, wartości wagi  $w_i$  zwanej poziomem aktywacji reguły (ang. level of activation) lub siłą odpalenia reguły (ang. firing strength), obliczeniu wartości każdego z następników oraz wyznaczeniu sumy ważonej tych wartości, w następujący sposób:

$$y_{k+1} = \frac{\sum_{i=1}^l w_i \cdot y_{k+1}^i}{\sum_{i=1}^l w_i}, \quad (3.2)$$

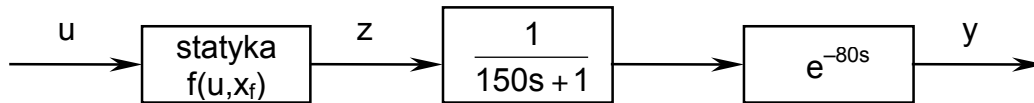
gdzie wartości wag  $w_i = \prod_{j=1}^{n_p} B_j^i(y_{k-j+1}) \cdot \prod_{j=1}^{m_p} C_j^i(u_{k-j+1})$  są wyznaczone przy użyciu operatora mnożenia (możliwe jest także zastosowanie operatora minimum). W dalszej części pracy, w celu uproszczenia wzorów i zwięzłego przedstawienia, użyto oznaczenia:  $\tilde{w}_i = w_i / \sum_{i=1}^l w_i$ .

Zaletą podejścia wykorzystującego modele Takagi–Sugeno jest także ułatwienie doboru parametrów regulatora dzięki zastosowaniu mechanizmu PDC (Parallel Distributed Compensation), polegającego na doborze do każdego modelu lokalnego z rozmytego modelu obiektu, regulatora liniowego metodami klasycznymi. Z tych regulatorów buduje się następnie regulator rozmyty. Korzystanie z tej metody nie jest konieczne, ale jest ona stosunkowo prosta w użyciu, a wynik jej zastosowania może posłużyć jako pierwsze rozwiązanie, które następnie można zmodyfikować.

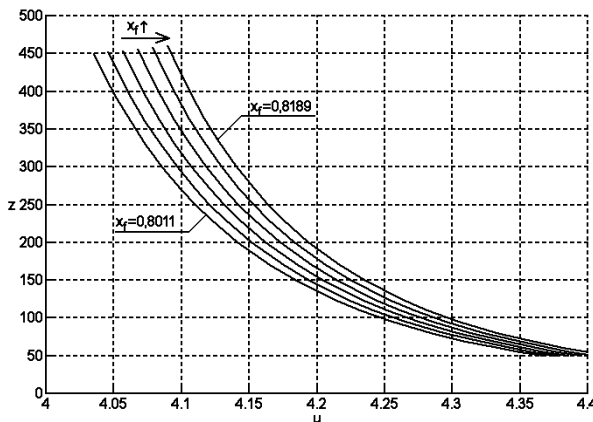
### Przykład 3.1.

Rozważmy obiekt w postaci kolumny etylenowej z układami regulacji. Model tej kolumny, zaprezentowany pokrótce poniżej, jest owocem prac prowadzonych w Instytucie Automatyki i Informatyki Stosowanej PW wspólnie z zespołem specjalistów z Instytutu Chemii Przemysłowej. Założono, że model ten ma strukturę Hammerstein’a, tzn. składa się z nieliniowej statyki poprzedzającej liniową dynamikę. Struktura tego modelu została pokazana na rys. 3.2, gdzie  $y$  – zanieczyszczenie produktu liczone w ppm,  $u$  – stosunek refluksu do produktu,  $x_f$  – skład surowca; stałe czasowe podano w minutach. Rozważany obiekt ma znaczne opóźnienie oraz jest silnie nieliniowy, co dobrze ilustrują jego charakterystyki statyczne pokazane na rys. 3.3. Zostały one sporządzone na podstawie próbek z modelu fizykochemicznego kolumny; próbki te zestawiono w dodatku, zamieszczonym na końcu pracy. Dane te posłużyły następnie do opracowania modeli statyki kolumny etylenowej. Przyjęto przy tym ograniczenie sterowania  $4,05 \leq u \leq 4,4$  ze względu na to, że dysponowano danymi z tego przedziału i modele były projektowane tak, aby dobrze pracowały właśnie w tym zakresie wartości sterowania.

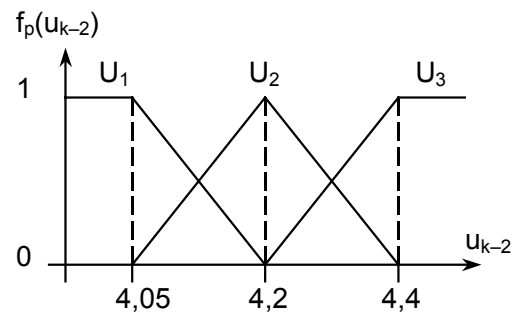




Rys. 3.2. Schemat blokowy modelu obiektu regulacji;  $u$  – sygnał sterujący,  $y$  – wyjście obiektu regulacji,  $z$  – wyjście modelu statyki,  $x_f$  – zakłócenie mierzalne



Rys. 3.3. Charakterystyki statyczne obiektu



Rys. 3.4. Funkcje przynależności rozmytego modelu obiektu

Pierwszy z modeli – wielomianowy został wyznaczony metodą najmniejszych kwadratów i ma postać opisaną wzorem:

$$\begin{cases} z = b_0 + b_1 \cdot u + b_2 \cdot u^2 + b_3 \cdot u^3 + b_4 \cdot u^4 + b_5 \cdot u^5, \\ b_i = a_{0i} + a_{1i} \cdot x_f + a_{2i} \cdot x_f^2, \end{cases} \quad (3.3)$$

gdzie  $z$  – wielkość wyjściowa modelu statyki,  $u$  – wielkość wejściowa modelu statyki,  $x_f$  – wielkość zakłócająca,  $a_{ji}$  ( $j = 0, 1, 2$ ) – stałe współczynniki, których wartości zostały zestawione w tabl. 3.1.

Tabl. 3.1. Wartości współczynników  $a_{ji}$  ze wzoru (3.3) (należy pomnożyć przez  $1,0e+011$ )

	$i = 0$	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$	$i = 4$	$i = 5$
$j = 0$	0,3996	-0,4518	0,2044	-0,0462	0,0052	-0,0002
$j = 1$	-1,0167	1,1494	-0,5199	0,1176	-0,0133	0,0006
$j = 2$	0,6485	-0,7332	0,3316	-0,0750	0,0085	-0,0004

Współczynnik dopasowania przedstawionego wyżej modelu do dostępnych danych, będący stosunkiem sumy kwadratów różnic  $e$  pomiędzy wartością wyjścia modelu a odpowiadającą jej wartością próbki, do liczby próbek, jest określony wzorem (3.4) i wynosi:

$$J = \frac{\sum e^2}{\text{liczba próbek}} = 0,02. \quad (3.4)$$

Drugi model, rozmyty, jest połączeniem modelu wielomianowego z modelem rozmytym typu Takagi–Sugeno i został opracowany z myślą o użyciu przy projektowaniu regulatorów. Przyjęte funkcje przynależności pokazano na rys. 3.4, a każdy z modeli lokalnych ma postać określoną wzorem:

$$\begin{cases} z = b_0 + b_1 \cdot r(x_f), \\ r(x_f) = u - a_1 \cdot (x_f - 0,81), \end{cases} \quad (3.5)$$

gdzie  $b_0$ ,  $b_1$  – stałe współczynniki z tabl. 3.2,  $a_1$  – stały współczynnik równy 3,136.

Tabl. 3.2. Wartości współczynników  $b_0$  i  $b_1$  ze wzoru (3.5)

	Obszar nr 1.	Obszar nr 2.	Obszar nr 3.
$b_0$	9487,0	4709,3	2408,7
$b_1$	-2222,4	-1083,2	-534,4

Współczynnik dopasowania modelu rozmytego do danych, wynosi tym razem:

$$J = \frac{\sum e^2}{\text{liczba próbek}} = 20,17. \quad (3.6)$$

Model wielomianowy posłużył następnie w badaniach symulacyjnych jako część obiektu regulacji, zaś model rozmyty był wykorzystywany przy doborze regulatorów.

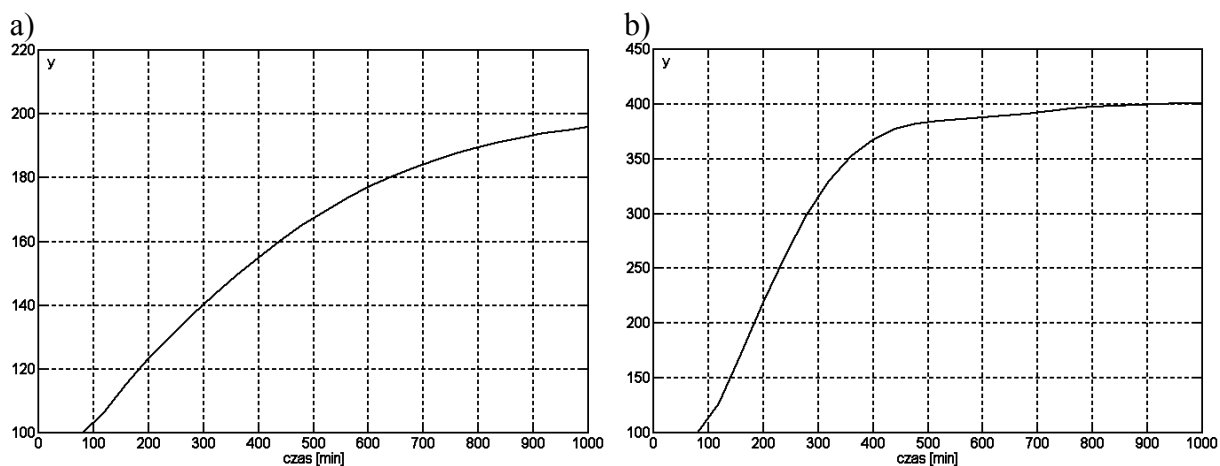
Opracowany model całego obiektu (statyka i dynamika) można przekształcić do klasycznej postaci Takagi–Sugeno. Dla okresu próbkowania  $T_p = 40$  min i przy pominięciu wpływu zakłócenia (przyjęciu  $x_f = 0,81$ ) otrzymano:

$$\text{Reguła 1: jeśli } u_{k-2} \text{ jest } U_1, \text{ to } y_{k+1}^1 = 0,7659 \cdot y_k - 520,2638 \cdot u_{k-2} + 2220,9067, \quad (3.7)$$

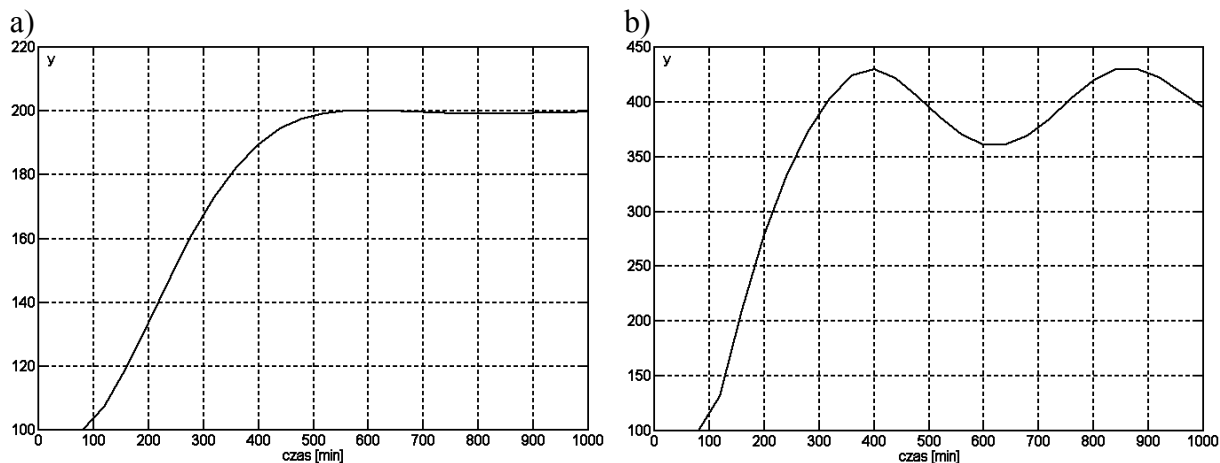
$$\text{Reguła 2: jeśli } u_{k-2} \text{ jest } U_2, \text{ to } y_{k+1}^2 = 0,7659 \cdot y_k - 253,5771 \cdot u_{k-2} + 1102,4471,$$

$$\text{Reguła 3: jeśli } u_{k-2} \text{ jest } U_3, \text{ to } y_{k+1}^3 = 0,7659 \cdot y_k - 125,1030 \cdot u_{k-2} + 563,8767,$$

z funkcjami przynależności takimi, jak poprzednio (rys. 3.4).



Rys. 3.5. Odpowiedzi układu regulacji z regulatorem DMC na skok wartości zadanej z  $y_0=100$  ppm do a)  $y_{zad}=200$  ppm, b)  $y_{zad}=400$  ppm; regulator projektowano dla odpowiedzi z okolicy 400 ppm,  $\lambda=4e+6$



Rys. 3.6. Odpowiedzi układu regulacji z regulatorem DMC na skok wartości zadanej z  $y_0=100$  ppm do a)  $y_{zad}=200$  ppm, b)  $y_{zad}=400$  ppm; regulator projektowano dla odpowiedzi z okolicy 200 ppm,  $\lambda=4e+6$

Do przykładowego obiektu spróbowano dobrać konwencjonalny regulator DMC. Wyniki eksperymentów przeprowadzonych w układzie regulacji z tego typu regulatorem, zaprezentowano na rys. 3.5 i 3.6 (czas podano w minutach).

Najpierw starano się dobrać regulator działający w sposób zadowalający dla dużych wartości zadanych (rzędu 400 ppm), co odpowiada działaniu w obszarze 1 modelu rozmytego (rys. 3.5b). Niestety, regulator dostrojony w tak dobranym zakresie pracował powoli dla średnich wartości zanieczyszczeń (rzędu 200 ppm), co dobrze ilustruje rys. 3.5a.

Następnie postąpiono odwrotnie, tzn. dobrano regulator działający szybciej w zakresie średnich wartości zadanych – rzędu 200 ppm, co odpowiada pracy w obszarze 2 modelu rozmytego (rys. 3.6a). Niestety, tak dostrojony regulator działał dla dużych wartości zanieczyszczeń (rzędu 400 ppm) w sposób dalece niezadowalający, ze względu na długo utrzymujące się oscylacje. Zaistniałą sytuację ilustruje rys. 3.6b.

W związku z uzyskanymi wynikami, nasuwa się pytanie: jak należy zaprojektować układ regulacji dla silnie nieliniowego obiektu, aby uzyskać jego zadowalającą pracę w całym dopuszczalnym zakresie wartości zadanych. Dalej zaproponowano rozwiązanie tego problemu polegające na użyciu w układzie regulacji, rozmytych algorytmów regulacji typu DMC.

### 3.2. Rozmyte regulatory predykcyjne w wersji analitycznej

Jak zaznaczono we wprowadzeniu, zastosowanie konwencjonalnego algorytmu predykcyjnego do silnie nieliniowego obiektu może nie przynieść zadowalających wyników lub działanie układu regulacji można poprawić poprzez zastosowanie rozmytego regulatora predykcyjnego.

Najprostszy z opracowanych rozmytych regulatorów DMC (FDMC) jest złożony z wielu konwencjonalnych regulatorów DMC. Idea tego algorytmu polega na tym, aby dla każdego obszaru (dla każdej reguły z modelu TS obiektu) uzyskać model w postaci wektora współczynników odpowiedzi skokowej. Następnie, na podstawie każdego takiego wektora, wyznacza się współczynniki  $r_j^i$  lokalnych regulatorów DMC ze wzoru (2.16) z rozdz. 2.2, gdzie  $i$  oznacza numer obszaru. W rezultacie otrzymuje się wiele regulatorów:

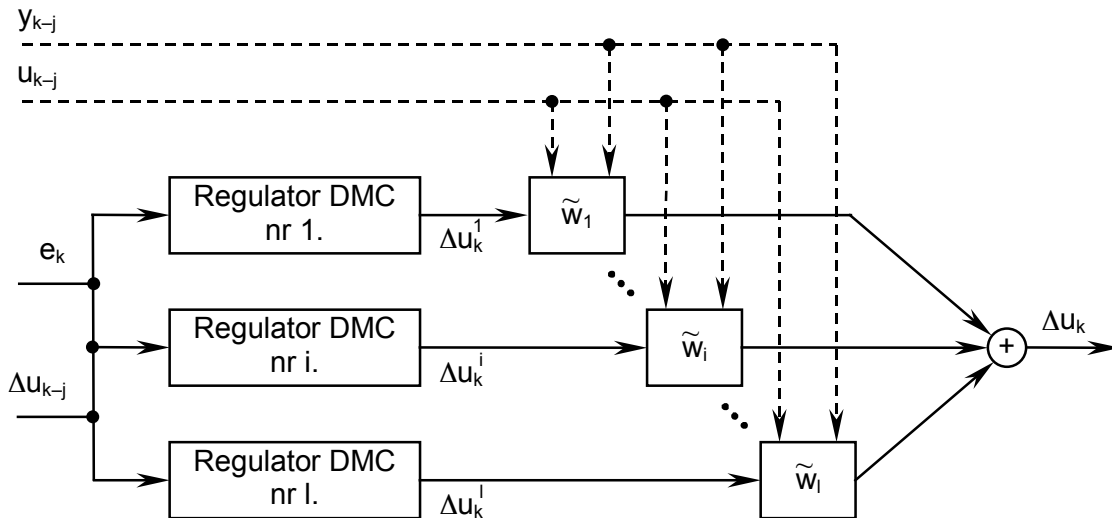
$$\Delta u_k^i = r_0^i \cdot e_k + \sum_{j=1}^{p_d-1} r_j^i \cdot \Delta u_{k-j}, \quad (3.8)$$

gdzie  $\Delta u_k^i$  – wyjście  $i$ -tego regulatora lokalnego,  $r_j^i$  – współczynniki regulatora otrzymane metodą opisaną w rozdz. 2.2,  $e_k$  – uchyb regulacji w bieżącej chwili,  $\Delta u_{k-j}$  – przyrosty sterowania z przeszłości.

W każdej iteracji są liczone, w sposób rozmyty, wagi poszczególnych regulatorów lokalnych zależne od wartości wejść i wyjść obiektu regulacji. Następnie jest obliczane wyjście regulatora (szukany przyrost sterowania) jako suma ważona wyjść poszczególnych regulatorów lokalnych (3.8):

$$\Delta u_k = \sum_{i=1}^l \tilde{w}_i \cdot \Delta u_k^i, \quad (3.9)$$

gdzie  $\Delta u_k^i$  – wyjścia regulatorów lokalnych opisane zależnością (3.8),  $\tilde{w}_i$  – znormalizowane wagi poszczególnych reguł,  $l$  – liczba regulatorów lokalnych. Schemat blokowy regulatora FDMC w wersji analitycznej jest pokazany na rys. 3.7, przy czym każdy z regulatorów lokalnych jest regulatorem DMC, którego struktura została pokazana na rys. 2.2, w rozdz. 2.



Rys. 3.7. Schemat blokowy regulatora FDMC w wersji analitycznej

W przypadku, gdy obiekt regulacji jest niestabilny, można zastosować regulator o analogicznej strukturze, ale z regulatorami lokalnymi wykorzystującymi modele w postaci równań różnicowych (rozdz. 2.4). Wówczas wystarczy użyć analogicznego sposobu konstrukcji regulatora, jak w przypadku regulatora FDMC, ale prawo regulacji każdego z regulatorów lokalnych będzie miało postać:

$$\Delta u_k^i = (r_e)^i \cdot e_k + \sum_{j=1}^{m-1} (r_u)_j^i \cdot \Delta u_{k-j} + \sum_{j=1}^{n+1} (r_y)_j^i \cdot y_{k-j+1}, \quad (3.10)$$

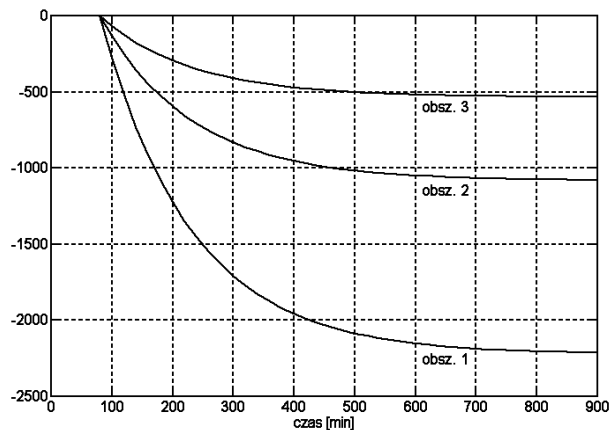
gdzie  $(r_e)^i, (r_u)_j^i, (r_y)_j^i$  – współczynniki regulatora jak we wzorze (2.40).

Wyjście regulatora rozmytego jest liczone ze wzoru (3.9) tak, jak w przypadku regulatora FDMC. Ponadto struktura tego regulatora jest analogiczna. Różnica tkwi w tym, że zamiast składników zależnych tylko od przyrostów sterowania w przeszłości, w prawie regulacji (3.10) znajdują się także składniki zależne od wartości wyjścia obiektu regulacji z przeszłości. Ponadto jest w nim mniej składników zależnych od przeszłych przyrostów sterowania.

### Przykład 3.2.

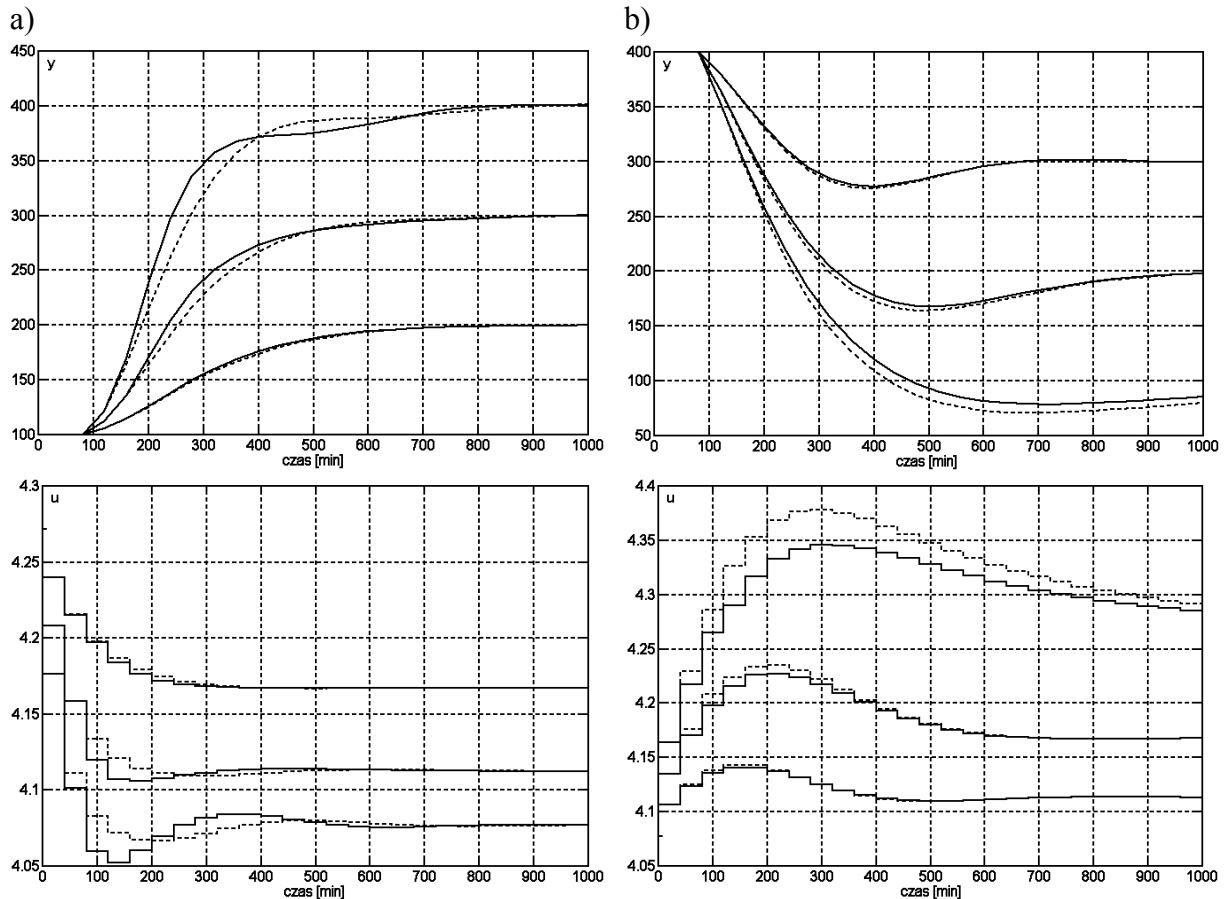
Do obiektu regulacji z przykładu 3.1, na podstawie odpowiedzi skokowych uzyskanych dla poszczególnych modeli lokalnych (rys. 3.8), dobrano regulator FDMC.

Zauważmy, że w stosowanym podejściu, podstawowym problemem jest wyznaczenie modelu liniowego, który będzie używany do predykcji. Zauważmy również, że ze względu na opóźnienie w obiekcie, sterowanie  $u_k$  wyznaczone w bieżącej chwili, będzie wpływać dopiero na wartość wyjścia obiektu w chwili  $k+3$ , czyli na  $y_{k+3}$ . Ponieważ ze względu na sposób działania regulatorów predykcyjnych, najbardziej interesujące jest sterowanie  $u_k$ , to warto by było jako model przybliżony wybrać ten, który wyniknie z wnioskowania rozmytego w obiekcie w chwili  $k+3$ . Niestety wartość



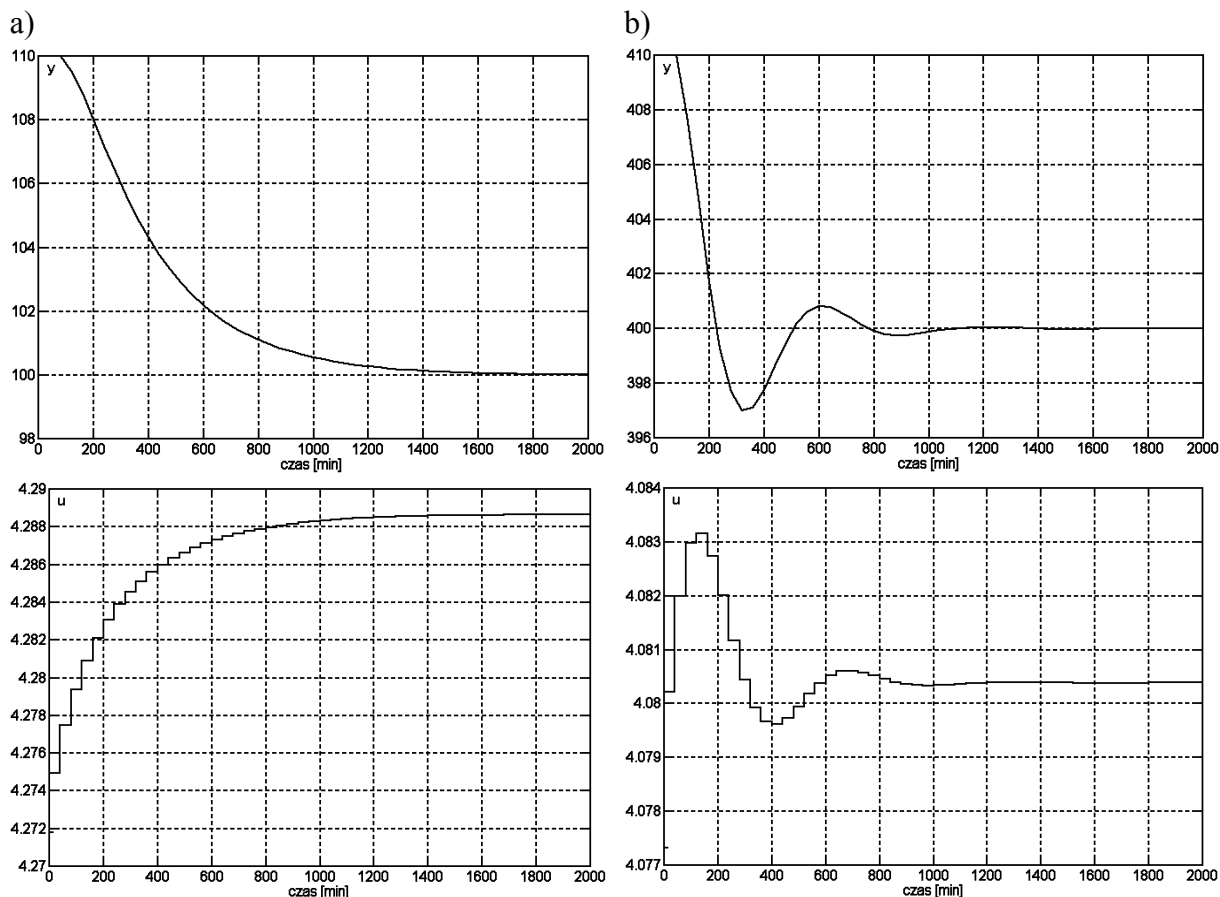
Rys. 3.8. Znormalizowane odpowiedzi skokowe poszczególnych modeli lokalnych, obszary: 1 – dużych, 2 – średnich i 3 – małych zanieczyszczeń

sterowania  $u_k$  nie jest jeszcze znana. W takim razie trzeba wyznaczyć model liniowy używając do wnioskowania innych, już znanych wartości sterowania. Dla przykładowego obiektu sprawdzono, jak działa regulator przy dwóch wariantach wnioskowania. Przykładowe odpowiedzi otrzymane w układzie regulacji z takimi regulatorami pokazano na rys. 3.9; wartość parametru dostrajalnego przyjęto równą  $\lambda = 8e+6$ . Tak duża wartość tego parametru wynika ze stosunkowo dużych wartości wyjścia, a co za tym idzie z dużych wartości elementów macierzy  $A^T \cdot A$ , ze wzoru (2.13), do której jest dodawana macierz  $\lambda \cdot I$ .



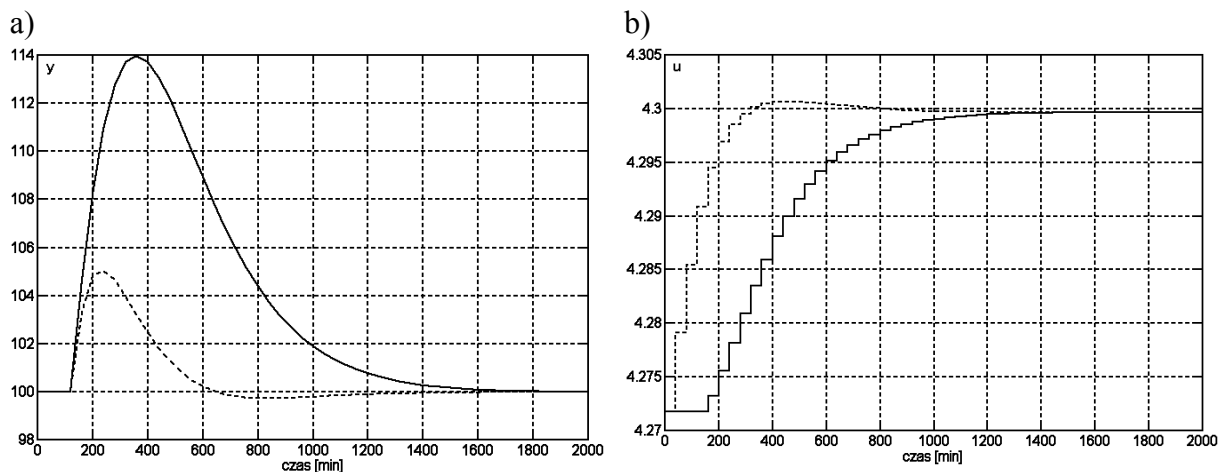
Rys. 3.9. Odpowiedzi układu regulacji z regulatorem FDRC w wersji analitycznej na skoki wartości zadanej z a)  $y_0 = 100$  ppm, b)  $y_0 = 400$  ppm; powyżej przebiegi wyjścia, poniżej przebiegi sterowania

Pierwsze podejście, jakie się nasuwa, to zastosowanie w regulatorze tak samo, jak w obiekcie, wnioskowania w zależności od sterowania dwie chwile wstecz  $u_{k-2}$ . Odpowiedzi otrzymane w układzie regulacji z takim regulatorem oznaczono na rys. 3.9 linią ciągłą. Sprawdzone także, jak na działanie regulatora wpływa wykorzystanie do wnioskowania ostatnio użytego sterowania  $u_{k-1}$  (linia przerywana na rys. 3.9). Otrzymane przebiegi zmieniły się niewiele. W obydwu przypadkach, charakter odpowiedzi jest podobny niezależnie od wielkości skoku wartości zadanej, przy skokach o tym samym znaku. Zaletą obydwu regulatorów jest brak przeregulowania w przypadku wzrostów wartości zadanej, co oznacza możliwość podejścia blisko do ewentualnego ograniczenia nałożonego na czystość produktu, bez jego uaktywniania. Jak się dalej okaże, zdecydowaną poprawę działania układu regulacji może przynieść zastosowanie algorytmów z wyznaczaniem odpowiedzi obiektu na sterowania otrzymane w poprzednich krokach działania regulatora, przy użyciu nieliniowego modelu obiektu. Algorytmy te zostały opisane w rozdz. 3.3.



Rys. 3.10. Odpowiedzi układu regulacji z regulatorem FDMC w wersji analitycznej na skok zakłócenia na wyjściu obiektu o  $y_{zak} = 10$  ppm z wartości początkowej a)  $y_0 = 100$  ppm, b)  $y_0 = 400$  ppm; powyżej przebiegi wyjścia, poniżej przebiegi sterowania

Sprawdzono także, jakie są odpowiedzi układu regulacji na skok zakłócenia podany na wyjście obiektu. Przyjęto wielkość skoku równą  $y_{zak} = 10$  ppm. Przykładowe odpowiedzi zamieszczono na rys. 3.10. Przy obydwu sposobach wnioskowania otrzymano prawie takie same wyniki. W przypadku ujemnego skoku zakłócenia o tej samej wartości, otrzymano symetryczne odpowiedzi i dlatego ich nie zamieszczono. Wraz z poruszaniem się w stronę większych wartości wyjścia (większych zanieczyszczeń), zwiększa się przeregulowanie, przy czym dla małych wartości wyjścia (rzędu 100 ppm), przeregulowanie praktycznie nie występuje.



Rys. 3.11. Odpowiedzi układu regulacji z regulatorem FDMC w wersji analitycznej na skok zakłócenia mierzalnego z  $x_{f0} = 0,81$  do  $x_f = 0,82$ ; a) przebiegi wyjścia, b) przebiegi sterowania; wnioskowanie zależne od  $u_{k-1}$

W algorytmach predykcyjnych jest możliwe skorzystanie w prosty sposób z mechanizmu uwzględniania zakłócenia mierzalnego (jak również prognozy zakłóceń). Rozpatrzmy przypadek, gdy występuje skok zakłócenia  $x_f$  z  $x_{f0} = 0,81$  do  $x_f = 0,82$ . Jeśli zakłócenie to nie jest uwzględniane w regulatorze, to odchylenie od wartości zadanej jest bardzo duże (linia ciągła na rys. 3.11) w stosunku do sytuacji, gdy skok zakłócenia jest wykrywany natychmiast i uwzględniany w regulatorze (linia przerywana na rys. 3.11). Mechanizm ten ma więc duże znaczenie, szczególnie w przypadku pracy regulatora blisko ograniczenia nałożonego na czystość otrzymywanego produktu i może bezpośrednio decydować o zyskach z produkcji (w przypadku przekroczenia ograniczenia produkt jest bezużyteczny i ponoszone są wymierne straty).

### 3.3. Rozmyte algorytmy predykcyjne w wersji numerycznej

W niniejszym rozdziale zostały opisane algorytmy bazujące na sformułowaniu algorytmu DMC jako zadania optymalizacji kwadratowej z ograniczeniami. Aby takie sformułowanie było możliwe, na podstawie nieliniowego modelu TS, w każdym kroku działania regulatora są wyznaczane przybliżenia modelu nieliniowego. Przy czym w poszczególnych algorytmach jest to czynione w inny sposób. Potem, na podstawie wyznaczonego modelu, jest dokonywana predykcja zachowania układu regulacji. Predykcja ta jest następnie wykorzystywana do sformułowania zadania optymalizacji, w wyniku rozwiązania którego, jest otrzymywana szukana wartość przyrostu sterowania. Opisana sekwencja czynności jest powtarzana w kolejnym kroku algorytmu. Poszczególne odmiany algorytmów FDMC w wersji numerycznej różnią się więc jedynie sposobem wyznaczania przybliżonego modelu procesu.

**Algorytm FDMC–SL z pojedynczą linearyzacją w bieżącym kroku** (ang. Single Linearization at current iteration) jest najprostszym spośród prezentowanych. Do prognozowania wpływu zarówno przeszłych jak i przyszłych wartości sterowania na zachowanie obiektu w przyszłości, stosuje się w danym kroku działania algorytmu ten sam model liniowy, otrzymany przy aktualnym stanie wejść i wyjść obiektu regulacji. Opis algorytmu oraz jego schemat (rys. 3.12) zamieszczono poniżej.

W każdym kroku działania regulatora jest powtarzana następująca sekwencja czynności:

1. Na podstawie modelu rozmytego TS jest wyznaczany model liniowy dla bieżącej chwili. Przypomnijmy, że wykorzystywany w algorytmie model obiektu regulacji ma postać następujących reguł:

Reguła  $i$ : jeśli  $y_k$  jest  $B_1^i$  i ... i  $y_{k-n_B+1}$  jest  $B_{n_B}^i$  i  $u_k$  jest  $C_1^i$  i ... i  $u_{k-m_C+1}$  jest  $C_{m_C}^i$  to

$$y_{k+1}^i = b_1^i \cdot y_k + \dots + b_{n_B}^i \cdot y_{k-n_B+1} + c_1^i \cdot u_k + \dots + c_{m_C}^i \cdot u_{k-m_C+1}, \quad (3.11)$$

gdzie oznaczenia przyjęto takie, jak we wzorze (3.1). Dla jasności opisu nie wyodrębniono opóźnienia w obiekcie. Zauważmy jednak, że w celu uwzględnienia opóźnienia, wystarczy przyjąć w modelu współczynniki  $c_1^i = \dots = c_d^i = 0$ , gdzie  $d$  – opóźnienie. Wyjście modelu jest obliczane ze wzoru:

$$y_{k+1} = \sum_{i=1}^l \tilde{w}_i \cdot y_{k+1}^i. \quad (3.12)$$

Przy czym wagi  $\tilde{w}_i$  są obliczane tak, jak opisano w rozdz. 3.1. Zauważmy, że ze względu na postać modelu, wzór (3.12) można zapisać w postaci:

$$y_{k+1} = b_1 \cdot y_k + \dots + b_{n_B} \cdot y_{k-n_B+1} + c_1 \cdot u_k + \dots + c_{m_C} \cdot u_{k-m_C+1}, \quad (3.13)$$

gdzie  $b_j = \sum_{i=1}^l \tilde{w}_i \cdot b_j^i$ ,  $c_j = \sum_{i=1}^l \tilde{w}_i \cdot c_j^i$ .

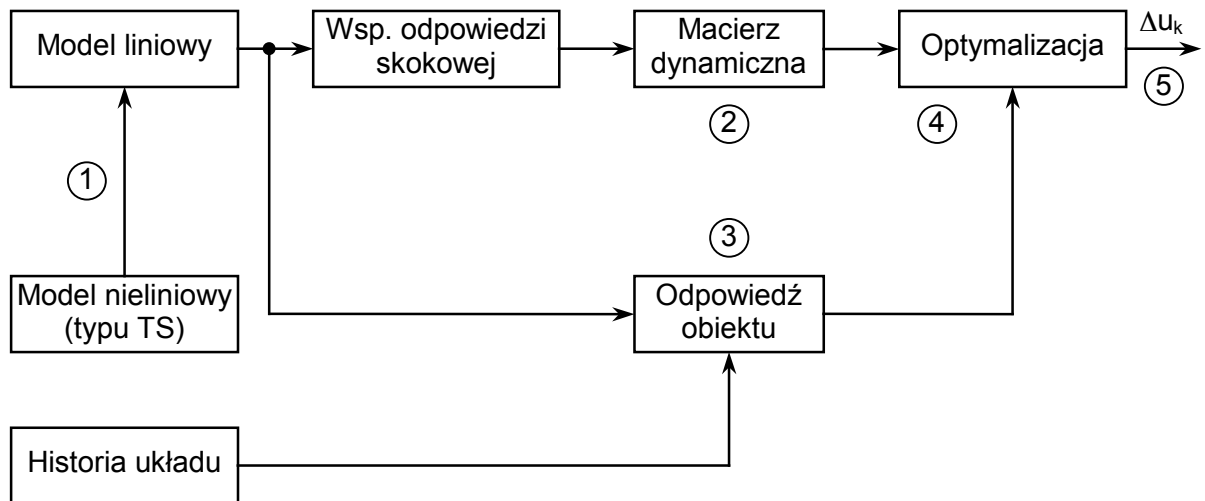
Dalsze kroki algorytmu są takie same, jak w konwencjonalnym algorytmie DMC, tzn.

2. Otrzymany model służy do wyznaczenia zestawu współczynników odpowiedzi skokowych, na podstawie których jest generowana macierz dynamiczna (rozdz. 2.2).

3. Model liniowy otrzymany w kroku 1 jest wykorzystywany do otrzymania odpowiedzi swobodnej obiektu.

4. Uzyskana odpowiedź swobodna wraz z macierzą dynamiczną są używane do sformułowania zadania optymalizacji kwadratowej.

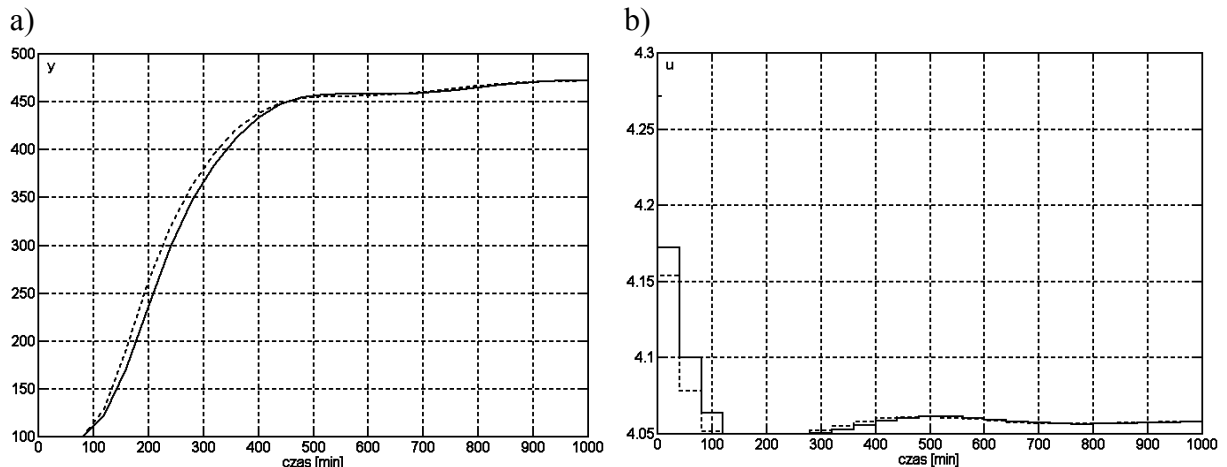
5. Zadanie optymalizacji jest rozwiązywane i na podstawie otrzymanego wyniku jest generowane sterowanie. Następnie regulator przechodzi do wykonania kolejnego kroku.



Rys. 3.12. Schemat algorytmu FDMC-SL

### Przykład 3.3.

Zastosowanie regulatora FDMC-SL do obiektu z przykładu 3.1 przyniosło praktycznie takie same rezultaty, jak zastosowanie regulatora FDMC w wersji analitycznej z wyjątkiem sytuacji, gdy narzucone ograniczenie było aktywne (rys. 3.13).



Rys. 3.13. Odpowiedzi układu regulacji z regulatorem FDMC-SL (linia ciągła) na tle odpowiedzi układu regulacji z regulatorem FDMC w wersji analitycznej (linia przerywana) na skok wartości zadanej z  $y_0 = 100$  ppm do  $y_{zad} = 470$  ppm; a) przebieg wyjścia, b) przebieg sterowania; wnioskowanie zależne od  $u_{k-1}$



Algorytm w wersji numerycznej generuje łagodniejsze sterowanie, jednak w rozpatrywanym przypadku wynik działania regulatora w wersji analitycznej jest bardzo zbliżony, co świadczy o tym, że metoda rzutowania sterowań na zbiór ograniczeń może dawać zadowalające efekty. Warto zwrócić uwagę na sposób wykorzystania przez regulator z optymalizacją informacji o istnieniu ograniczenia. Dzięki mechanizmowi predykcji, regulator zawczasu przygotowuje się do dojścia do ograniczenia, więc generuje mniejsze przyrosty sterowania i dochodzi do ograniczenia stopniowo.

Jeśli obiekt regulacji jest silnie nieliniowy, niedokładność przybliżonego modelu przyjętego do predykcji może być na tyle duża, że jakość regulacji oferowana przez opisane do tej pory regulatory będzie niezadowalająca. Poprawę działania układu regulacji może wtedy przynieść zastosowanie algorytmów poddanych pewnym modyfikacjom.

**Algorytm FDMC–SLRN z pojedynczą linearyzacją w bieżącym kroku i predykcją odpowiedzi obiektu na uprzednio wyznaczone sterowania przy użyciu modelu nieliniowego** (ang. Single Linearization at current iteration and plant Response to previously derived controls obtained using Nonlinear model) jest właściwie nieco zmienionym algorytmem FDMC–SL. Modyfikacja polega na użyciu do predykcji odpowiedzi obiektu na już obliczone sterowania, pełnego modelu nieliniowego a nie, jak poprzednio, przybliżonego modelu liniowego. Wtedy tylko wpływ przyszłych (dopiero wyznaczanych) przyrostów sterowań jest liczony na podstawie macierzy dynamicznej otrzymanej przy użyciu modelu liniowego. W algorytmie punkty 1, 2, 4 i 5 pozostają więc bez zmian (są takie same, jak w algorytmie FDMC–SL), natomiast różnica pojawia się w punkcie 3.

3. Odpowiedź obiektu jest generowana przy użyciu nieliniowego modelu procesu opisanego wzorami (3.11) i (3.12). Predykcji tej odpowiedzi na krok  $k+1$  i dalsze dokonuje się używając dostępnych pomiarów zmiennych wyjściowych oraz informacji o przeszłych wartościach sterowania. Ponadto wartości sterowania w bieżącej i dalszych chwilach (jeszcze nieznane) można przyjąć równe sterowaniu w chwili poprzedniej (ostatnio użytemu)  $u_{k-1}$ . W tym przypadku otrzymamy odpowiedź swobodną obiektu.

Można także zastosować inne podejście, w którym wyznacza się odpowiedź obiektu, przy założeniu zastosowania sterowań wygenerowanych przez regulator w chwili  $k-1$ . Rozwiązanie to prowadzi zazwyczaj do uzyskania lepszych wyników, ponieważ uzyskiwane, w wyniku rozwiązania zadania optymalizacji, przyrosty sterowania są mniejsze, więc niedokładności modelowania wynikające z linearyzacji obiektu również. Niestety uwzględnianie ograniczeń jest w tym przypadku bardziej skomplikowane. Ponadto należy pamiętać o odpowiednim sformułowaniu wskaźnika jakości tak, aby parametr dostrajalny  $\lambda$  dotyczył rzeczywistych przyrostów sterowania, a nie tylko poprawek względem założonej trajektorii, które są zmiennymi decyzyjnymi rozwiązywanego zadania optymalizacji.

Przyjmijmy, że jako przyszłe wartości sterowań, użyte zostaną te wyznaczone w poprzednim kroku działania regulatora; pomijany jest wpływ zakłócenia, które zostanie uwzględnione dalej, w ostatecznym wzorze opisującym przewidywaną wartość wyjścia. W takim razie, na podstawie zależności (3.11) i (3.12), pierwszy element odpowiedzi obiektu będzie opisany wzorami:

Reguła  $i$ : jeśli  $y_k$  jest  $B_1^i$  i ... i  $y_{k-n_p+1}$  jest  $B_{n_p}^i$  i  $u_{k|k-1}$  jest  $C_1^i$  i ... i  $u_{k-m_p+1}$  jest  $C_{m_p}^i$  to

$$y_{k+1|k}^{sw,i} = b_1^i \cdot y_k + \dots + b_{n_B}^i \cdot y_{k-n_B+1} + c_1^i \cdot u_{k|k-1} + \dots + c_{m_C}^i \cdot u_{k-m_C+1}, \quad (3.14)$$

$$y_{k+1|k}^{sw} = \sum_{i=1}^l \tilde{w}_1^i \cdot y_{k+1|k}^{sw,i}. \quad (3.15)$$

Dalsze elementy wyznaczonej odpowiedzi uzyskuje się rekurencyjnie, ale jako wartości sterowań w przyszłości są podstawiane odpowiednie sterowania otrzymane w chwili  $k-1$ , zaś jako wartości wyjść w przyszłości, już wyznaczone elementy odpowiedzi obiektu. W takim razie dla chwili  $j$  ( $j = 1, \dots, p$ ), otrzymuje się:

Reguła  $i$ : jeśli  $y_{k+j-1|k}^{sw}$  jest  $B_1^i$  i ... i  $y_{k-n_B+j}$  jest  $B_{n_B}^i$  i  $u_{k+j-1|k-1}$  jest  $C_1^i$  i ... i  $u_{k-m_C+j}$  jest  $C_{m_C}^i$  to

$$y_{k+j|k}^{sw,i} = b_1^i \cdot y_{k+j-1|k}^{sw} + \dots + b_{n_B}^i \cdot y_{k-n_B+2} + c_1^i \cdot u_{k+j-1|k-1} + \dots + c_{m_C}^i \cdot u_{k-m_C+2}, \quad (3.16)$$

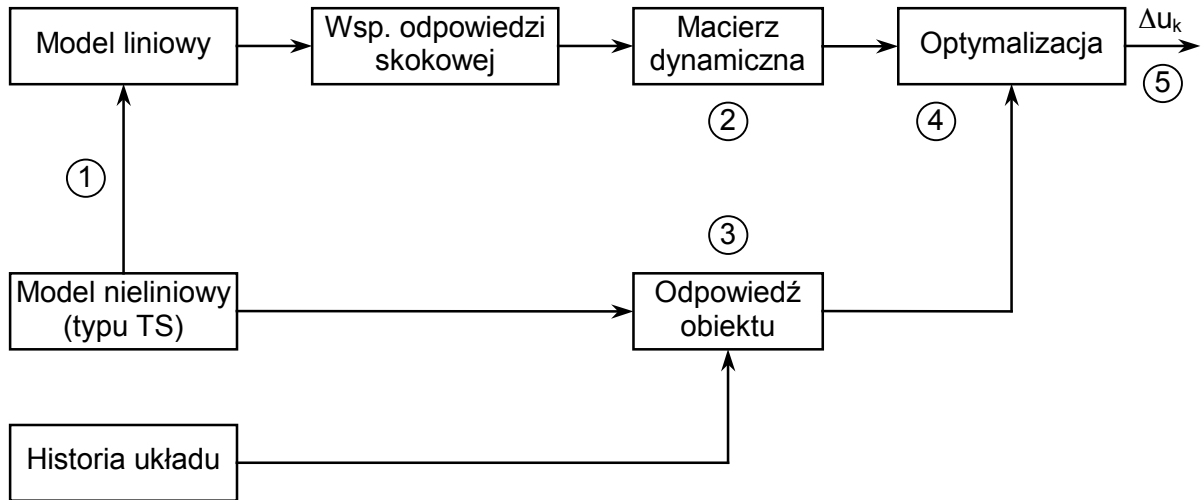
$$y_{k+j|k}^{sw} = \sum_{i=1}^l \tilde{w}_j^i \cdot y_{k+j|k}^{sw,i}. \quad (3.17)$$

Ostatecznie, przewidywane wartości wyjścia obiektu regulacji są opisane wzorem:

$$y_{k+j|k} = \sum_{i=1}^j a_i \cdot \Delta \tilde{u}_{k-i+j|k} + y_{k+j|k}^{sw} + d_k, \quad (3.18)$$

gdzie  $a_i$  – współczynniki odpowiedzi skokowej,  $\Delta \tilde{u}_{k-i+j|k}$  – przyszłe przyrosty sterowania względem przyrostów przyjętych podczas wyznaczenia odpowiedzi obiektu,  $y_{k+j|k}^{sw}$  – elementy odpowiedzi układu, których sposób obliczania pokazano wyżej,  $d_k$  – zakłócenie w chwili  $k$ ; przyjęto model zakłócenia taki sam, jak w algorytmie DMC (rozdz. 2.2), czyli że pozostaje ono stałe na horyzoncie predykcji.

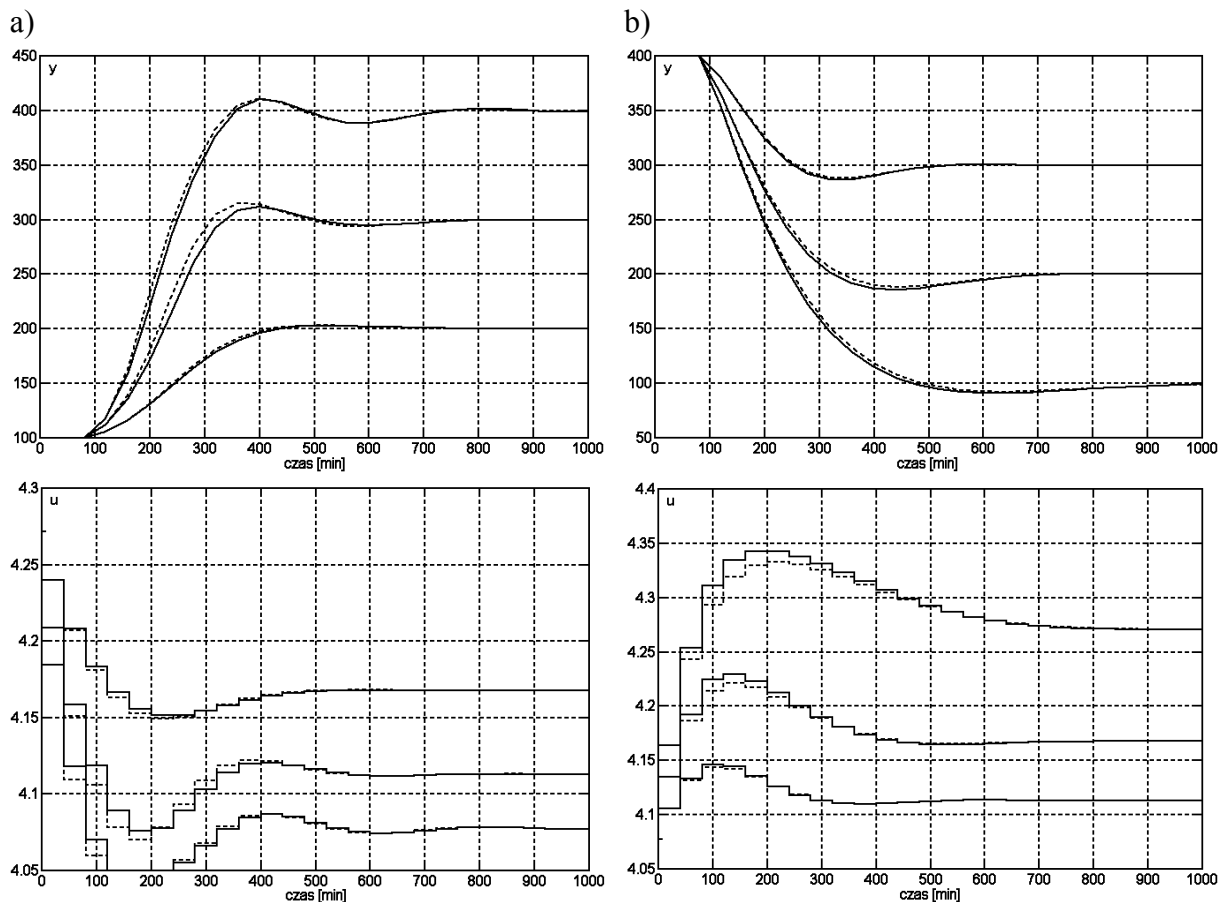
Schemat tak zmodyfikowanego algorytmu pokazano na rys. 3.14. Zauważmy, że różnica z poprzednio omówionym algorytmem tkwi jedynie w sposobie otrzymywania odpowiedzi obiektu na uprzednio wyznaczone sterowania.



Rys. 3.14. Schemat algorytmu FDMC-SLRN

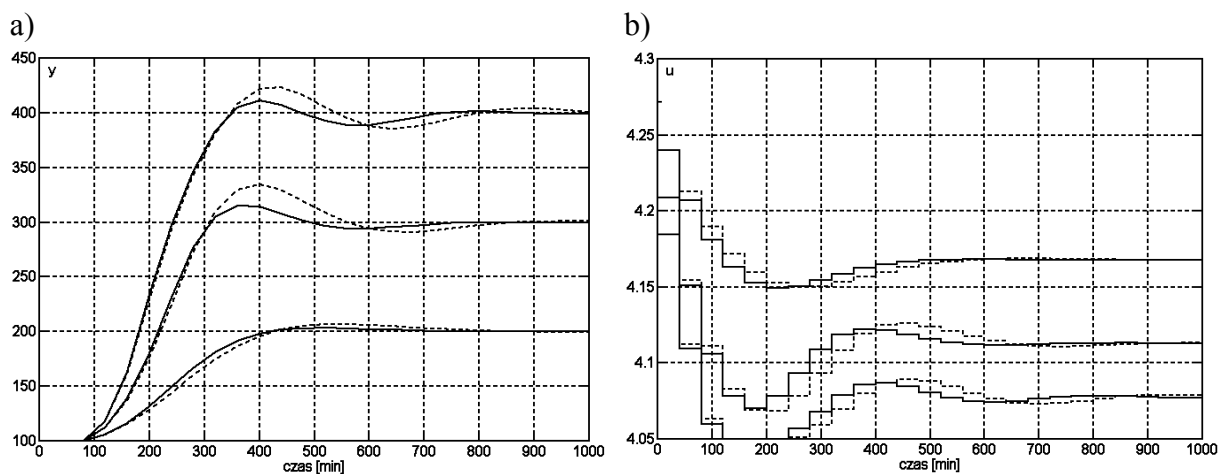
### Przykład 3.4.

Do przykładowego obiektu regulacji dobrano regulator FDMC-SLRN. Po zastosowaniu tego algorytmu, otrzymano widoczną poprawę działania układu regulacji. Przykładowe odpowiedzi pokazano na rys. 3.15. Tym razem, również użyto wnioskowania w zależności od różnych zmiennych i tak samo, jak poprzednio, linią ciągłą oznaczono przebiegi otrzymane z regulatorem, w którym model liniowy był wyznaczany w zależności od  $u_{k-2}$ , a linią przerywaną – otrzymane z regulatorem z wnioskowaniem w zależności od  $u_{k-1}$ .



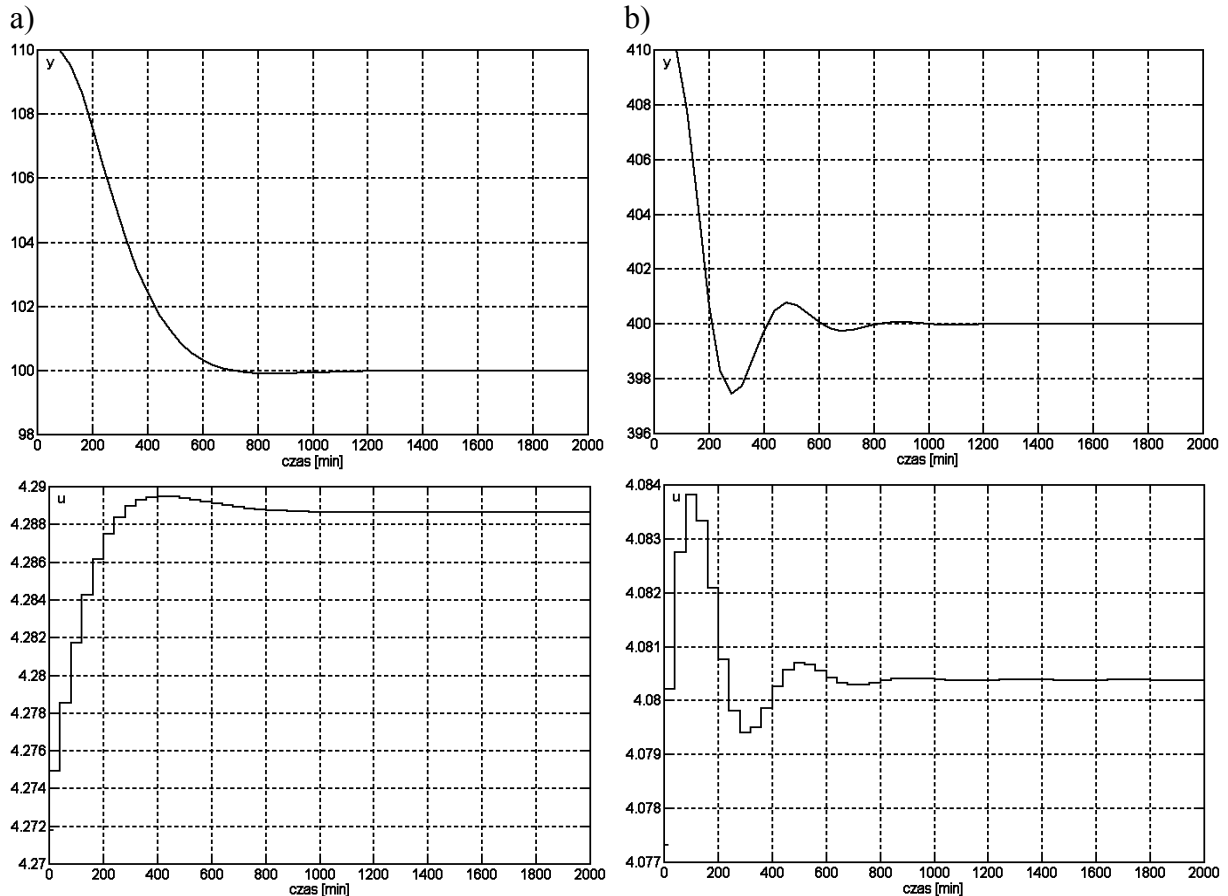
Rys. 3.15. Odpowiedzi układu regulacji z regulatorem FDMC–SLRN na skoki wartości zadanej z a)  $y_0 = 100$  ppm, b)  $y_0 = 400$  ppm; powyżej przebiegi wyjścia, poniżej przebiegi sterowania

Różnice pomiędzy obydwojema regulatorami, wynikające z różnic we wnioskowaniu są niewielkie. Zauważmy natomiast przyspieszenie regulacji w stosunku do wcześniej badanych układów regulacji (rys. 3.9) oraz zdecydowane zmniejszenie przeregulowania w przypadku ujemnych skoków wartości zadanej.



Rys. 3.16. Odpowiedzi układu regulacji z regulatorem FDMC–SLRN (linia ciągła) na tle odpowiedzi układu regulacji z regulatorem FDMC–SLRN wykorzystującym odpowiedź swobodną obiektu (linia przerywana), na skoki wartości zadanej z  $y_0 = 100$  ppm; a) przebiegi wyjścia, b) przebiegi sterowania; wnioskowanie zależne od  $u_{k-1}$

Sprawdzono także, jak na działanie algorytmu wpływa korzystanie ze sterowań otrzymanych w poprzednim kroku działania regulatora, podczas wyznaczania odpowiedzi obiektu, w porównaniu z przypadkiem, gdy zakłada się do tego celu stałą wartość sterowania (wykorzystuje się odpowiedź swobodną). Otrzymane w obydwu przypadkach, przykładowe przebiegi pokazano na rys. 3.16. Zasygnalizowane wcześniej różnice pomiędzy podejściami są wyraźnie widoczne tak samo, jak korzyść wynikająca z użycia sterowań wyznaczonych w poprzednim kroku algorytmu, do otrzymania odpowiedzi obiektu.



Rys. 3.17. Odpowiedzi układu regulacji z regulatorem FDMC–SLRN na skok zakłócenia na wyjściu obiektu o  $y_{zak} = 10$  ppm z wartości początkowej a)  $y_0 = 100$  ppm, b)  $y_0 = 400$  ppm; powyżej przebiegi wyjścia, poniżej przebiegi sterowania

Zbadano także, jak układ regulacji reaguje na skok zakłócenia podany na wyjście obiektu. Przyjęto przy tym wielkość skoku  $y_{zak} = 10$  ppm. Przykładowe odpowiedzi zamieszczono na rys. 3.17. Przy obydwu sposobach wnioskowania otrzymano praktycznie takie same wyniki. Warto te odpowiedzi porównać z ich odpowiednikami, otrzymanymi w układach regulacji z poprzednich przykładów (rys. 3.10). W układzie regulacji z regulatorem FDMC–SLRN, zakłócenie jest kompensowane zdecydowanie szybciej, a ponadto przeregulowanie dla większych wartości wyjścia jest mniejsze niż poprzednio, zaś dla małych wartości (okolice 100 ppm) co prawda pojawiło się niewielkie przeregulowanie, ale za to czas regulacji uległ zdecydowanemu skróceniu.

Jeśli zajdzie taka potrzeba, do algorytmu FDMC–SLRN można wprowadzić kolejną modyfikację, polegającą na innym wyznaczaniu macierzy dynamicznej.

**Algorytm FDMC–MLRN z wielokrotną linearyzacją w bieżącym kroku i predykcją odpowiedzi obiektu na uprzednio wyznaczone sterowania przy użyciu modelu nieliniowego** (ang. Multiple Linearization at current iteration and plant Response to previously de-

rived controls obtained using Nonlinear model) zawiera tę modyfikację. W algorytmie tym, najpierw jest wyznaczana odpowiedź obiektu na poprzednio wygenerowane sterowania, a następnie wiele modeli liniowych wokół kolejnych punktów tej odpowiedzi. Potem, na podstawie odpowiedzi skokowych otrzymanych modeli, jest generowana macierz dynamiczna. Tym razem zmianie ulegają trzy pierwsze punkty algorytmu oraz kolejność poszczególnych kroków.

1. Najpierw, na podstawie modelu nieliniowego jest otrzymywana odpowiedź obiektu na sterowania wyznaczone w poprzednich krokach działania algorytmu (tak samo, jak w algorytmie FDMC–SLRN).

2. Następnie, na podstawie modelu rozmytego TS i otrzymanej odpowiedzi obiektu, są wyznaczane modele liniowe wzdłuż tej odpowiedzi. Jest to czynione przy okazji wykonywania punktu 1. Zauważmy, że podczas generowania odpowiedzi obiektu na poprzednio obliczone sterowania, w każdym kroku można otrzymać współczynniki szukanego modelu, ponieważ ze względu na postać modelu TS, wzór (3.17) można zapisać w postaci:

$$y_{k+j|k}^{sw} = (b_j)_1 \cdot y_{k+j-1|k}^{sw} + \dots + (b_j)_{n_B} \cdot y_{k-n_B+2} + (c_j)_1 \cdot u_{k+j-1|k-1} + \dots + (c_j)_{m_C} \cdot u_{k-m_C+2}, \quad (3.19)$$

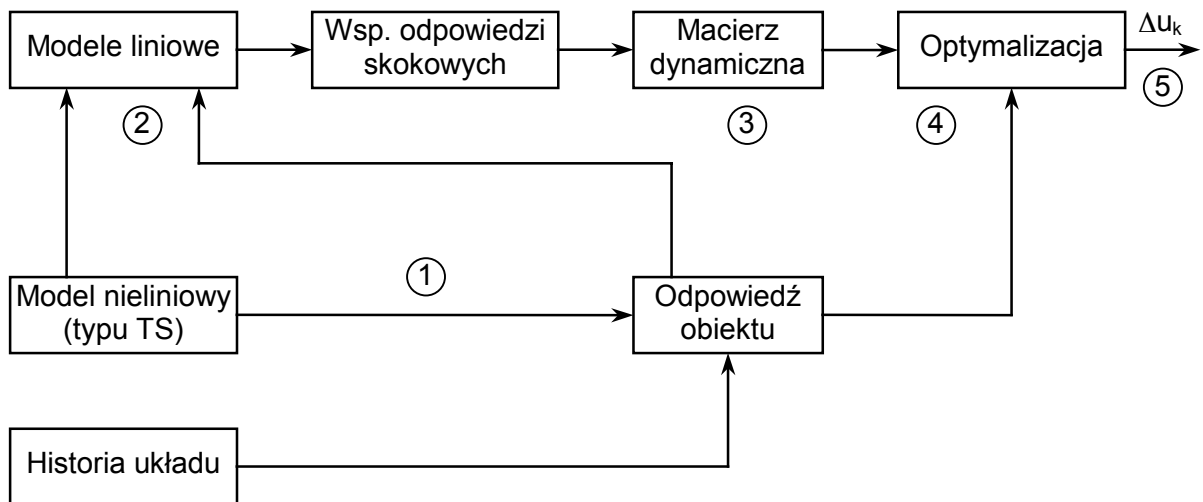
gdzie  $(b_j)_{j_b} = \sum_{i=1}^l \tilde{w}_j^i \cdot b_{j_b}^i$  oraz  $(c_j)_{j_c} = \sum_{i=1}^l \tilde{w}_j^i \cdot c_{j_c}^i$ .

3. Otrzymane w poprzednim kroku modele służą do wyznaczenia zestawów współczynników odpowiedzi skokowych, na podstawie których jest generowana macierz dynamiczna. Ma ona postać podaną poniżej:

$$A = \begin{bmatrix} a_1^1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_2^2 & a_1^2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_p^p & a_{p-1}^p & \dots & a_{p-s+2}^p & a_{p-s+1}^p \end{bmatrix}, \quad (2.20)$$

gdzie  $a_i^j$  –  $i$ -ty współczynnik odpowiedzi skokowej otrzymanej na podstawie  $j$ -tego modelu uzyskanego w punkcie 2 algorytmu.

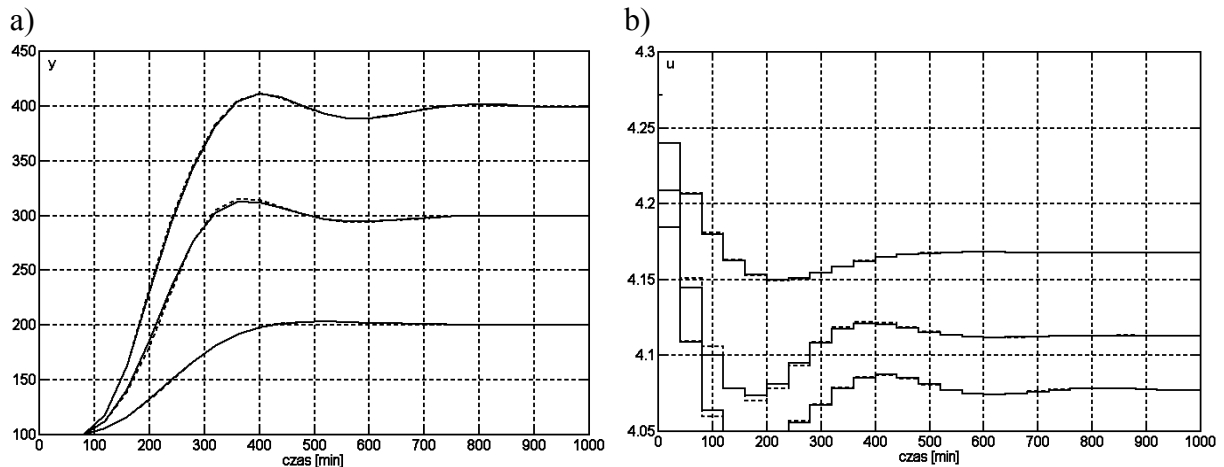
Schemat algorytmu został przedstawiony na rys. 3.18.



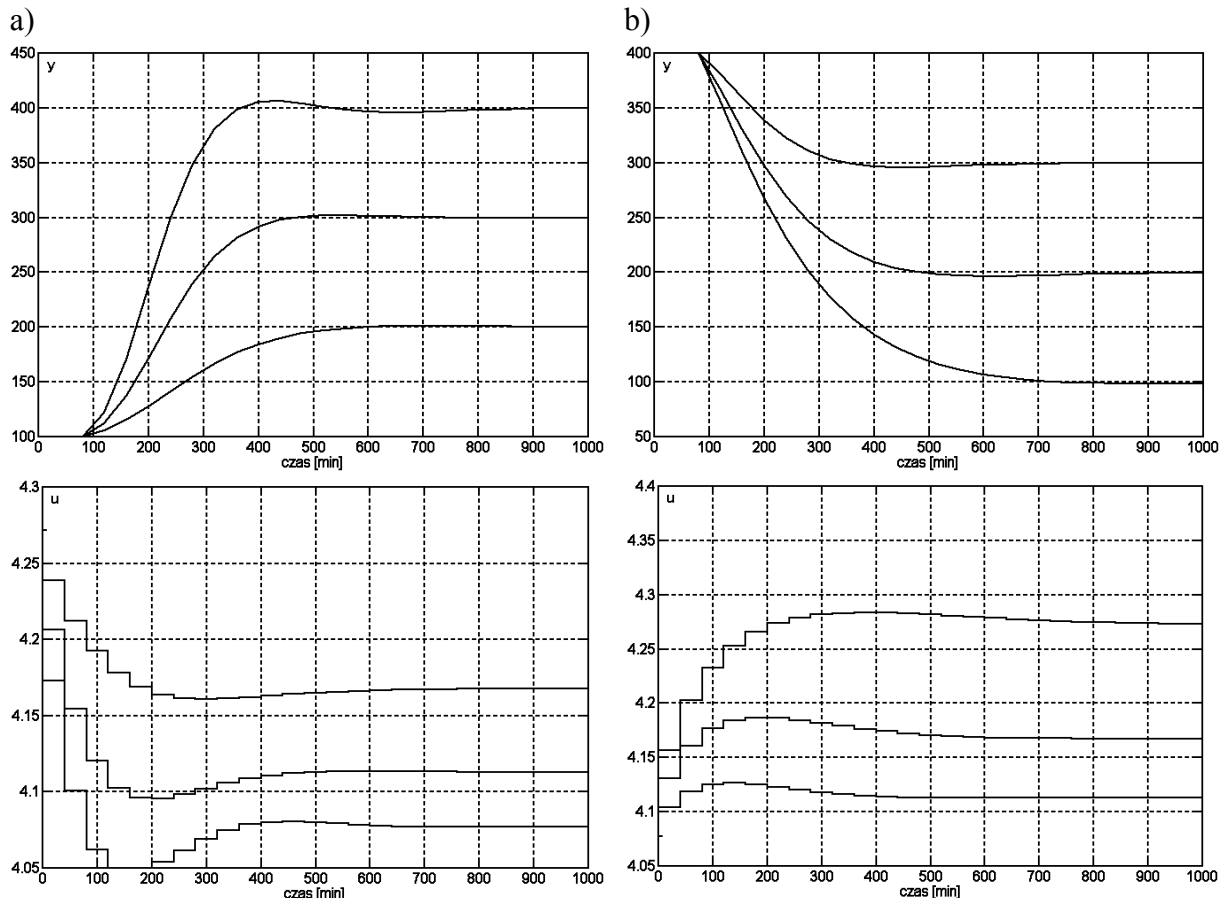
Rys. 3.18. Schemat algorytmu FDMC–MLRN

### Przykład 3.5.

Użycie algorytmu FDMC-MLRN do regulacji przykładowej kolumny etylenowej nie przyniosło widocznej poprawy działania układu regulacji (rys. 3.19). Różnicę można łatwo dostrzec praktycznie tylko między sygnałami sterującymi. Natomiast przebiegi wielkości wyjściowej są prawie takie same (dostrzegalna jest różnica w okolicy 300 ppm). Odpowiedzi na skok zakłócenia podany na wyjście obiektu regulacji były jeszcze bardziej zbliżone i dlatego nie zostały zamieszczone.



Rys. 3.19. Odpowiedzi układu regulacji z regulatorem FDMC-MLRN (linia ciągła) i układu regulacji z regulatorem FDMC-SLRN (linia przerywana) na skoki wartości zadanej z  $y_0 = 100$  ppm; a) przebiegi wyjścia, b) przebiegi sterowania; wnioskowanie zależne od  $u_{k-1}$

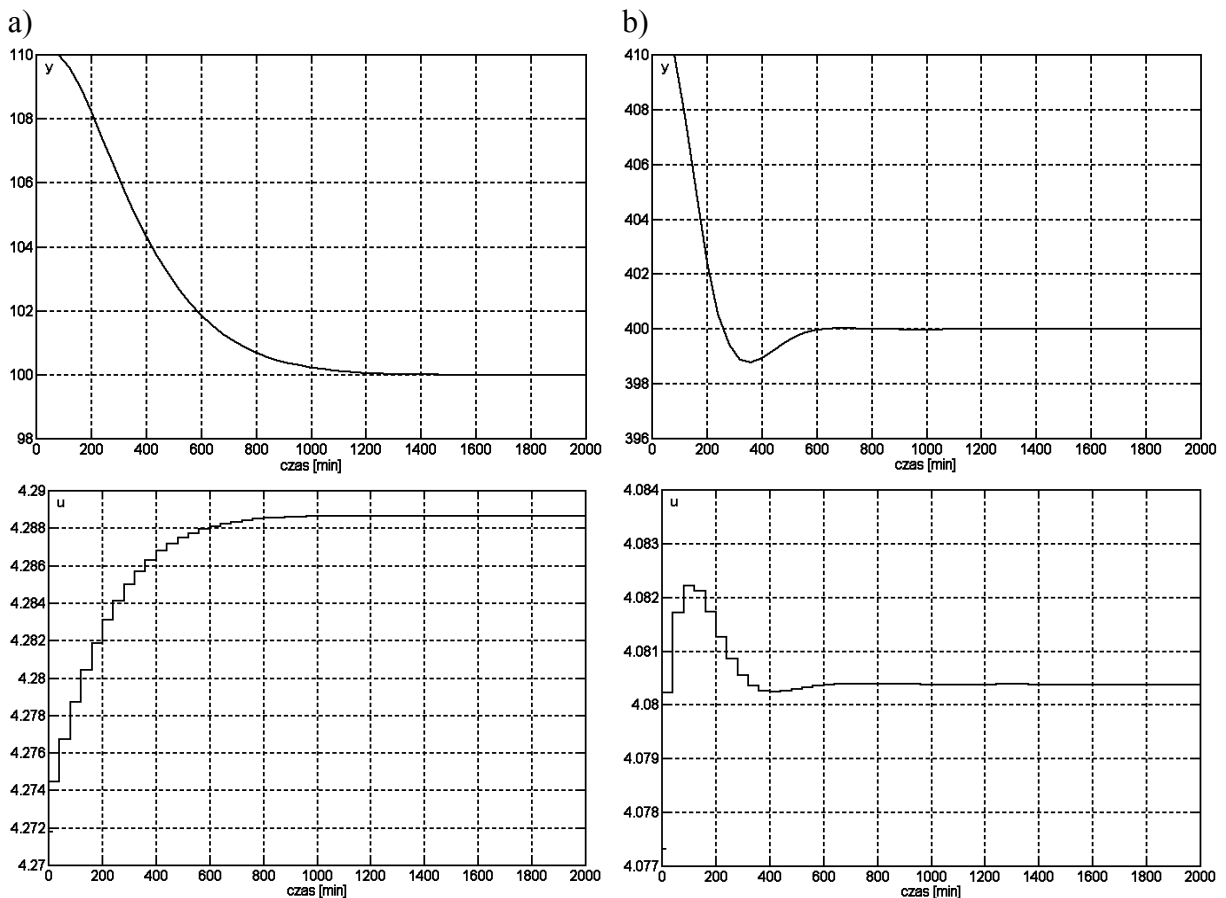


Rys. 3.20. Odpowiedzi układu regulacji z regulatorem z nieliniową optymalizacją na skoki wartości zadanej z a)  $y_0 = 100$  ppm, b)  $y_0 = 400$  ppm; powyżej przebiegi wyjścia, poniżej przebiegi sterowania

Proponowana modyfikacja, w rozważanym przypadku, nie wpłynęła w znaczący sposób na działanie układu regulacji, może natomiast być przydatna w przypadku silniej nieliniowych obiektów regulacji.

Wyniki działania układów regulacji z proponowanymi regulatorami warto porównać z przypadkiem, w którym wykorzystano algorytm predykcyjny z pełną nieliniową optymalizacją. Przykładowe odpowiedzi układu regulacji z takim algorytmem na skoki wartości zadanej, pokazano na rys. 3.20. Otrzymane odpowiedzi charakteryzują się mniejszym przeregulowaniem oraz łagodniejszymi przebiegami sterowania i podobnym czasem regulacji w porównaniu z poprzednio badanymi przypadkami (dla regulatorów FDMC–SLRN i FDMC–MLRN).

Sprawdzono także, jak badany układ regulacji reaguje na skok zakłócenia podany na wyjściu obiektu. Uzyskane odpowiedzi przedstawiono na rys. 3.21. Zauważmy, że szybszą odpowiedź w okolicy małych zanieczyszczeń, otrzymano w układach regulacji z algorytmami FDMC–SLRN i FDMC–MLRN, korzystającymi z wyznaczania odpowiedzi obiektu na uprzednio otrzymane sterowania, przy użyciu modelu nieliniowego (rys. 3.17). W przypadku odpowiedzi z okolicy dużych zanieczyszczeń, czas regulacji w obydwu przypadkach jest podobny, jednak przeregulowanie jest mniejsze, gdy zastosowano regulator z nieliniową optymalizacją.



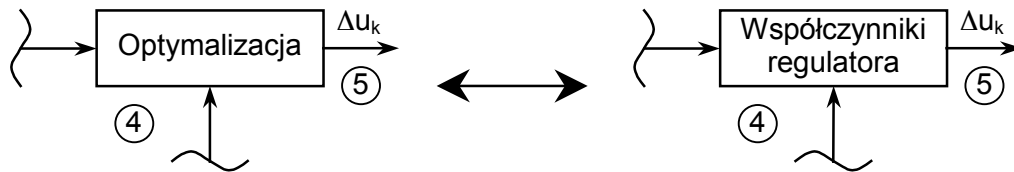
Rys. 3.21. Odpowiedzi układu regulacji z regulatorem z nieliniową optymalizacją na skok zakłócenia na wyjściu obiektu o  $y_{zak} = 10$  ppm z wartości początkowej a)  $y_0 = 100$  ppm, b)  $y_0 = 400$  ppm; powyżej przebiegi wyjścia, poniżej przebiegi sterowania

Warto także zauważyć, że w algorytmach FDMC–SLRN i FDMC–MLRN, z odpowiedzią obiektu otrzymywaną na podstawie sterowań wygenerowanych przez algorytm w poprzednim kroku działania, można wprowadzić dodatkową modyfikację polegającą na kilkukrotnym powtarzaniu linearyzacji i optymalizacji w jednym kroku działania regulatora. Wtedy otrzymywana odpowiedź zmienia się przy okazji każdego powtórzenia iteracji. Wówczas wyzna-

czane, w wyniku rozwiązania zadania optymalizacji, przyrosty sterowania są coraz mniejsze, a co za tym idzie, otrzymane rozwiązania powinny być coraz lepsze, jako otrzymywane na podstawie dokładniejszej predykcji.

Stosując tę procedurę, można często uzyskać wyniki zbliżone do otrzymanych w układzie z regulatorem z pełną nieliniową optymalizacją [102]. Co więcej, można tę metodę stosować tylko w wybranych krokach działania algorytmu, kiedy w wyniku dużych wymuszeń, jest silniej odczuwany nieliniowy charakter obiektu. Ponadto, dobierając odpowiednio liczbę powtórzeń każdej iteracji, można osiągnąć żądany kompromis pomiędzy czasem potrzebnym na znalezienie rozwiązania a postawionymi względem układu regulacji wymaganiami.

Każdy z wyżej opisanych algorytmów w przypadku, gdy nie jest potrzebne uwzględnianie ograniczeń, może zostać uproszczony, gdyż sterowanie w danym kroku może zostać wyznaczone tak, jak w algorytmie analitycznym, czyli w wyniku zastosowania równania algebraicznego (2.13) lub, co jest równoważne, wyznaczenia współczynników regulatora analitycznego i użycia wzoru (2.16). Odpowiednią modyfikację algorytmów najprościej wyjaśnić wprowadzając tę zmianę na schematach algorytmów (rys. 3.12, 3.14, 3.18). Na schematach tych wystarczy blok *Optymalizacja* zastąpić blokiem *Współczynniki regulatora*, jak to pokazano na rys. 3.22.



Rys. 3.22. Modyfikacja algorytmów z wersji numerycznej na analityczną

Innymi słowy zmianie ulegną 4 i 5 punkt wyżej opisanych algorytmów i będą one teraz następujące:

4. Otrzymane w poprzednich punktach macierz dynamiczna oraz odpowiedź obiektu są używane do sformułowania równania algebraicznego, z którego otrzymuje się współczynniki regulatora w danym kroku.

5. Na podstawie otrzymanych współczynników jest generowane sterowanie. Następnie regulator przechodzi do wykonania kolejnego kroku.

W przypadku, gdy nieliniowość modelu dotyczy głównie statyki, wszystkie opisane w tym podrozdziale algorytmy można uprościć. Zamiast wyznaczania modelu liniowego (lub modeli liniowych, w zależności od podejścia) w każdym kroku działania algorytmu, wystarczy raz otrzymać odpowiedzi skokowe poszczególnych modeli lokalnych. Następnie, można na ich podstawie, w sposób rozmyty, wyznaczać macierz dynamiczną w każdym kroku działania algorytmu (tak czyniono w przykładach dotyczących regulacji kolumny etylenowej). Podejście to można zastosować także w przypadku obiektów o innej strukturze, jednak należy sprawdzić, czy działanie otrzymanego układu regulacji będzie zadowalające.

Przedstawione przykłady świadczą o zadowalającej pracy opisanych algorytmów. Jednak istotnym zagadnieniem jest możliwość zaprojektowania stabilnego układu regulacji. Rozważania dotyczące stabilności układów regulacji z przedstawionymi algorytmami, zarówno w wersji analitycznej, jak i numerycznej, zostały zaprezentowane w rozdz. 4.



#### 4. Analiza stabilności układów regulacji z regulatorami predykcyjnymi

W niniejszym rozdziale przedstawiono metody analizy oraz sposoby zapewniania stabilności układów regulacji z regulatorami predykcyjnymi DMC i FDMC zarówno w wersjach analitycznych jak i numerycznych. W pierwszej kolejności zostały omówione zagadnienia dotyczące konwencjonalnych algorytmów DMC, zarówno dla przypadku bez uwzględniania ograniczeń (wersja analityczna), jak i z uwzględnianiem ograniczeń w zadaniu optymalizacji. Zostały przy tym omówione metody zapewniania stabilności układów regulacji z algorytmami predykcyjnymi bazującymi na liniowych modelach procesów, a w szczególności na modelach w postaci równań stanu.

Metody te można zastosować także w algorytmach predykcyjnych wykorzystujących modele nieliniowe. Jednak ograniczono się w tym przypadku do wskazania literatury, w której te podejścia zostały szczegółowo omówione. Uczyniono tak ponieważ działanie tych mechanizmów jest analogiczne, jak w przypadku algorytmów z modelami liniowymi, a ponadto głównym przedmiotem zainteresowania są algorytmy FDMC, których jedną z cech jest wykorzystywanie linearyzacji modelu nieliniowego w każdym kroku działania. Co więcej, omawiane metody zapewniania stabilności układów regulacji z regulatorami bazującymi na nieliniowych obiektach wymagają znajdowania dokładnego rozwiązania zadania optymalizacji. W przypadku użycia modelu nieliniowego, zadania optymalizacji nieliniowej, którego starano się, w zaproponowanych w niniejszej pracy algorytmach, uniknąć.

Następnie przedstawiono sposoby adaptacji omówionych metod do algorytmu typu DMC i wskazano podobieństwa między algorytmami wykorzystującymi poszczególne rozwiązania. Przedstawiono także sposób badania stabilności układów regulacji z analitycznymi regulatorami rozmytymi, a w szczególności z algorytmem FDMC. Metoda ta polega na przekształceniu modelu opisującego układ regulacji do takiej postaci, aby możliwe było zastosowanie twierdzenia Tanaki–Sugeno [101]. Warto jednak zaznaczyć, że jest to postać standardowo używana do opisu modeli rozmytych i możliwe jest wówczas skorzystanie także z innych warunków stabilności.

W dalszej części rozdziału przedstawiono metodę zapewniania stabilności układów regulacji z algorytmami FDMC w wersji numerycznej. Metoda ta jest oparta na podejściu, w którym z dopuszczalności rozwiązań wynika stabilność układu regulacji z badanym algorytmem, przy czym nie jest wymagana optymalność wyznaczonej sekwencji sterowań, tzn. można skorzystać z dowolnego sposobu generacji sterowań pod warunkiem, że spełniają one założone warunki.

Głównym wymaganiem postawionym przy opracowywaniu rozważanych algorytmów w wersji numerycznej jest wymóg, aby w każdym kroku działania takiego algorytmu było rozwiązywane zadanie programowania kwadratowego z liniowymi ograniczeniami. Dzięki temu mamy gwarancję znalezienia rozwiązania problemu optymalizacji, jeśli oczywiście takie rozwiązanie istnieje, tzn. jeśli narzucone ograniczenia nie są sprzeczne (w przypadku braku ograniczeń nałożonych na wyjścia obiektu, istnienie rozwiązania zależy od sformułowania problemu i jeśli rozwiązanie nie istnieje, to znaczy, że zadanie zostało źle sformułowane). Co więcej, można przewidzieć maksymalny czas obliczeń potrzebny do znalezienia rozwiązania, co ma decydujące znaczenie, jeśli algorytm ma być stosowany on–line.

Warto w tym miejscu zaznaczyć, że problem zapewnienia stabilności układów regulacji z algorytmami z linearyzacją, tzn. takiego typu, jak algorytmy FDMC, do tej pory nie został rozwiązany w satysfakcjonujący sposób. Ponadto zagadnienie to jest bardziej skomplikowane od zapewniania stabilności algorytmu z optymalizacją nieliniową w każdym kroku działania regulatora. Drugi z wymienionych problemów ma szereg rozwiązań opartych na mechanizmach podobnych do tych, jakie zastosowano w algorytmach predykcyjnych wykorzystujących liniowy model obiektu regulacji. Zostało to omówione szerzej w zamieszczonym przeglądzie.

Kolejną ważną kwestią, którą trzeba rozwiązać jest możliwość wprowadzania do zaproponowanych algorytmów ograniczeń nałożonych na wartości wyjścia obiektu regulacji w warunkach niepewności [64, 68]. Należy to jednak czynić w taki sposób, aby układ regulacji był nadal stabilny, co ma miejsce gdy zadanie optymalizacji jest w każdym kroku dopuszczalne. Dlatego omówiono także mechanizmy zapewniania dopuszczalności problemu liniowo-kwadratowego.

Struktura niniejszego rozdziału jest następująca: rozważania zaczęto od omówienia zagadnień dotyczących konwencjonalnych algorytmów DMC. Przedstawiono metody zapewniania stabilności układów regulacji z algorytmami predykcyjnymi. Sformułowano algorytmy DMC tak, aby układy regulacji, w których zostaną one użyte, były stabilne. Następnie przedstawiono sposób badania stabilności układów regulacji z rozmytymi algorytmami predykcyjnymi, a w szczególności z algorytmem FDMC, w wersji analitycznej. W dalszej kolejności opisano algorytmy FDMC w wersji numerycznej z mechanizmami zapewniającymi stabilność układów regulacji, w których te algorytmy zostaną użyte.

#### 4.1. Układy regulacji z konwencjonalnymi regulatorami predykcyjnymi w wersji analitycznej

Zacznijmy od rozpatrzenia najprostszego przypadku, czyli algorytmu regulacji predykcyjnej, w szczególności DMC, bez uwzględniania ograniczeń nałożonych na sygnały sterujące lub wyjściowe. W tej sytuacji algorytm regulacji predykcyjnej może zostać przekształcony do postaci analitycznej (rozd. 2). Ponieważ regulator jest liniowy, to stabilność układu regulacji z takim algorytmem, zakładając jego zastosowanie do obiektu liniowego, może zostać zbadana za pomocą standardowych metod znanych z teorii sterowania układów liniowych, co zostało przedstawione poniżej.

Niech obiekt regulacji będzie opisany modelem:

$$y_{k+1} = b_1 \cdot y_k + \dots + b_n \cdot y_{k-n+1} + c_1 \cdot u_k + \dots + c_m \cdot u_{k-m+1}, \quad (4.1)$$

gdzie  $b_1, \dots, b_n, c_1, \dots, c_m$  – współczynniki modelu,  $y_k$  – wyjście obiektu regulacji w chwili  $k$ ,  $u_k$  – wejście obiektu regulacji w chwili  $k$ . Bez straty ogólności można przyjąć  $n = m$ .

Prawo regulacji regulatora DMC w wersji analitycznej może zostać przekształcone do następującej postaci (rozd. 2):

$$u_k = r_0 \cdot e_k + (1 + r_1) \cdot u_{k-1} + (r_2 - r_1) \cdot u_{k-2} + \dots + (r_{p_d-1} - r_{p_d-2}) \cdot u_{k-p_d+1} - r_{p_d-1} \cdot u_{k-p_d}, \quad (4.2)$$

gdzie  $r_0, \dots, r_{p_d-1}$  – współczynniki regulatora,  $p_d$  – horyzont dynamiki,  $e_k$  – uchyb regulacji w chwili  $k$ ,  $u_k$  – sterowanie w chwili  $k$ .

W takim razie transmitancje obiektu i regulatora są następujące:

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{\sum_{j=1}^m c_j \cdot z^{m-j}}{z^m - \sum_{i=1}^m b_i \cdot z^{m-i}}, \quad (4.3)$$

$$\frac{U(z)}{E(z)} = \frac{r_0 \cdot z^{p_d}}{z^{p_d} - (1 + r_1) \cdot z^{p_d-1} - \sum_{i=2}^{p_d-1} (r_i - r_{i-1}) \cdot z^{p_d-i} + r_{p_d-1}}, \quad (4.4)$$

gdzie  $E(z) = Y_{zad}(z) - Y(z)$ . Po zamknięciu pętli sprzężenia zwrotnego otrzymamy więc:

$$\frac{Y(z)}{Y_{zad}(z)} = \frac{\sum_{j=1}^m r_0 \cdot c_j \cdot z^{p_d+m-j}}{\sum_{j=1}^m r_0 \cdot c_j \cdot z^{p_d+m-j} + \left( z^{p_d} - (1+r_1) \cdot z^{p_d-1} - \sum_{i=2}^{p_d-1} (r_i - r_{i-1}) \cdot z^{p_d-i} + r_{p_d-1} \right) \cdot \left( z^m - \sum_{i=1}^m b_i \cdot z^{m-i} \right)}. \quad (4.5)$$

Następnie można wyznaczyć bieguny transmitancji układu zamkniętego (4.5) lub skorzystać z jednego z kryteriów badania stabilności liniowych układów dyskretnych.

#### Przykład 4.1.

Zostanie teraz zbadana stabilność przykładowego układu regulacji z regulatorem DMC w wersji analitycznej. Niech obiekt regulacji będzie opisany wzorem:

$$y_{k+1} = 0,7 \cdot y_k + 0,8 \cdot u_k. \quad (4.6)$$

Współczynniki regulatora DMC dobranego do tego obiektu są zamieszczone w tabl. 4.1.

Tabl. 4.1. Współczynniki regulatora

<i>i</i>	0	1	2	3	4	5	6	7	8	
<i>r<sub>i</sub></i>	0,9999	-0,6300	-0,4410	-0,3087	-0,2161	-0,1512	-0,1060	-0,0741	-0,0519	
<i>i</i>	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
<i>r<sub>i</sub></i>	-0,0362	-0,0254	-0,0179	-0,0124	-0,0088	-0,0061	-0,0043	-0,0030	-0,0021	-0,0013

Na mocy zależności (4.5), współczynniki wielomianu charakterystycznego układu zamkniętego mają wartości zamieszczone w tabl. 4.2. Łatwo jest sprawdzić, że otrzymany układ regulacji jest stabilny; jego wartości własne znajdują się bowiem w kole jednostkowym.

Tabl. 4.2. Współczynniki wielomianu charakterystycznego układu zamkniętego

<i>i</i>	1	2	3	4	5	6	7
<i>d<sub>i</sub></i>	1,0000e+000	-2,7005e-001	6,9989e-002	2,7865e-006	2,5145e-006	-5,1883e-005	1,3763e-004
<i>i</i>	8	9	10	11	12	13	14
<i>d<sub>i</sub></i>	-2,0319e-004	2,2108e-004	-2,3738e-004	2,0388e-004	-2,3112e-005	-1,6294e-004	1,9655e-004
<i>i</i>	15	16	17	18	19	20	21
<i>d<sub>i</sub></i>	-1,4231e-004	8,7536e-005	5,8318e-006	-1,0548e-004	-7,4579e-005	-7,6788e-004	9,0993e-004

Powyżej zaprezentowano sposób badania stabilności już zaprojektowanego układu regulacji. Niestety, w ogólnym przypadku nie ma gwarancji, że układ regulacji z zaprojektowanym regulatorem predykcyjnym ze skończonym horyzontem będzie stabilny. Dlatego też, wkrótce po opracowaniu algorytmów predykcyjnych, zaczęto szukać sposobów zapewniania stabilności układów regulacji z tymi algorytmami już na etapie projektowania.

Początkowo badanie stabilności układów regulacji z regulatorami predykcyjnymi dotyczyło głównie algorytmów ze skończonym horyzontem, bez uwzględniania ograniczeń. Polegało ono albo na znajdowaniu takich wartości parametrów dostrajalnych (wag poszczególnych składników we wskaźniku jakości, długości horyzontów), dla których układ regulacji z projektowanym regulatorem był stabilny albo na określaniu, dla jakich klas modeli można dobrać takie parametry, aby zaprojektowany układ regulacji był stabilny [21, 94]. Podstawową wadą tych rozwiązań było ograniczenie ich zastosowania do sytuacji bez uwzględniania ograniczeń, a ponadto stabilność można było dowieść w pewnych szczególnych przypadkach.

## 4.2. Układy regulacji z algorytmami predykcyjnymi w wersji numerycznej

Z czasem zaczęło przeważać innego rodzaju podejście do problemu stabilności, polegające na wprowadzeniu do zadania optymalizacji takich modyfikacji, aby uzyskany regulator stabilizował obiekt regulacji. Mogą one zostać użyte dla przypadku bez ograniczeń, jednak zostaną omówione głównie pod kątem zastosowania w przypadku algorytmów w wersji numerycznej, z ograniczeniami.

Warto zaznaczyć, że wprowadzane modyfikacje oznaczają w praktyce przyjęcie nieskończonego horyzontu predykcji, a pierwowzoru tego rodzaju sposobów można szukać już w latach 70–tych ubiegłego stulecia [42, 43, 44, 45, 46]. Ponieważ omawiane metody były w pierwszej kolejności opracowywane dla algorytmów wykorzystujących stanowy model obiektu regulacji, w takiej też formie zostaną tutaj zaprezentowane. Adaptację podstawowych sposobów zapewniania stabilności układu regulacji z regulatorami predykcyjnymi do konwencjonalnego algorytmu DMC w wersji z optymalizacją opisano w rozdz. 4.3.

Podstawowe sposoby formułowania algorytmu regulacji predykcyjnej tak, aby układ regulacji z takim algorytmem był stabilny, polegają na:

- dodaniu do zadania optymalizacji ograniczenia równościowego nałożonego na stan końcowy (na końcu horyzontu predykcji);
- użyciu nieskończonego horyzontu predykcji.

Ponadto zostaną krótko omówione inne metody jak:

- dodanie do wskaźnika jakości, kary za stan końcowy oraz ograniczenia nałożonego na stan procesu (metoda dla algorytmów predykcyjnych z modelami nieliniowymi została nazwana metodą z quasi–nieskończonym horyzontem);
- zastosowanie algorytmu dualnego, w którym po dojściu w otoczenie punktu równowagi, jest włączany odpowiednio zaprojektowany regulator ze sprzężeniem od stanu;
- wprowadzeniu do zadania optymalizacji ograniczenia nierównościowego nałożonego na stan obiektu (wymuszeniu malenia normy wektora stanu w każdym kroku algorytmu o pewien współczynnik) bądź sztucznej funkcji Lapunowa, czyli odpowiednio dobranej funkcji, której malenie się wymusza.

Dokładne omówienie i dowód stabilności przedstawiono dla pierwszych dwóch z wymienionych metod. Uczyniono tak ponieważ, głównie na tych metodach bazują proponowane rozwiązania dotyczące algorytmu DMC (rozdz. 4.3). Dowody stabilności omawianych algorytmów wykorzystują właściwie to samo podejście, tzn. udowodnienie, że wskaźnik jakości z zadania optymalizacji jest funkcją Lapunowa układu regulacji z odpowiednio zmodyfikowanym algorytmem predykcyjnym. Twierdzenie Lapunowa dla układów dyskretnych przypomniano poniżej.

### Twierdzenie 4.1.

Niech badany układ dyskretny będzie opisany zależnością:

$$\mathbf{x}_{k+1} = f(\mathbf{x}_k), \quad (4.7)$$

gdzie  $\mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^n$  i

$$f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}. \quad (4.8)$$

Niech istnieje funkcja skalarna  $V(\mathbf{x}_k)$  wektora stanu  $\mathbf{x}_k$ , ciągła w  $\mathbf{x}_k$  taka, że są spełnione warunki:

1.  $V(\mathbf{0}) = 0$ ,
2.  $V(\mathbf{x}_k) > 0$  dla  $\mathbf{x}_k \neq \mathbf{0}$ ,

$$3. V(\mathbf{x}_k) \rightarrow \infty \text{ dla } \|\mathbf{x}_k\| \rightarrow \infty,$$

$$4. W(\mathbf{x}_k) = V(\mathbf{x}_{k+1}) - V(\mathbf{x}_k) \leq 0 \text{ dla } \mathbf{x}_k \neq \mathbf{0} \text{ i } W(\mathbf{0}) = 0.$$

Wtedy układ dyskretny (4.7) jest stabilny i  $V(\mathbf{x}_k)$  jest funkcją Lapunowa. Jeśli jest spełniony warunek

$$4a. W(\mathbf{x}_k) < 0 \text{ dla } \mathbf{x}_k \neq \mathbf{0} \text{ i } W(\mathbf{0}) = 0,$$

to układ dyskretny (4.7) jest stabilny asymptotycznie.

Zauważmy, że jeśli interesuje nas niezerowy punkt równowagi, to wystarczy dokonać stosownej zmiany współrzędnych [53]. Dalej będziemy więc zakładać, że układ regulacji sprządza stan obiektu i sterowania do zera.

Załóżmy, że obiekt regulacji jest opisany modelem:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+1} &= \mathbf{A}\mathbf{x}_k + \mathbf{B}\mathbf{u}_k, \\ \mathbf{y}_k &= \mathbf{C}\mathbf{x}_k, \end{aligned} \quad (4.9)$$

gdzie  $\mathbf{x}_k$  – stan obiektu,  $\mathbf{u}_k$  – wejście obiektu,  $\mathbf{y}_k$  – wyjście obiektu.

Rozważmy algorytm predykcyjny polegający na rozwiązywaniu, w każdym kroku następującego zadania optymalizacji:

$$\min_{\mathbf{u}} J = \sum_{j=0}^p \mathbf{x}_{k+j|k}^T \mathbf{Q} \mathbf{x}_{k+j|k} + \sum_{j=0}^{s-1} \mathbf{u}_{k+j|k}^T \mathbf{R} \mathbf{u}_{k+j|k}, \quad (4.10)$$

przy ograniczeniach:

$$\Delta \mathbf{u}_{\min} \leq \Delta \mathbf{u}_{k+j|k} \leq \Delta \mathbf{u}_{\max}, \quad (4.10a)$$

$$\mathbf{u}_{\min} \leq \mathbf{u}_{k+j|k} \leq \mathbf{u}_{\max}, \quad (4.10b)$$

$$\mathbf{y}_{\min} \leq \mathbf{y}_{k+j|k} \leq \mathbf{y}_{\max}, \quad (4.10c)$$

gdzie  $\mathbf{Q}$ ,  $\mathbf{R}$  – macierze dodatnio określone,  $\mathbf{u}_{k+j|k}$  – sterowania wyznaczone w chwili  $k$  dla chwili  $k+j$ ,  $\mathbf{x}_{k+j|k}$  – stan układu przewidywany w chwili  $k$  dla chwili  $k+j$ , przy czym  $\mathbf{u}_{k|k} = \mathbf{u}_k$  oraz  $\mathbf{x}_{k|k} = \mathbf{x}_k$ ,  $\Delta \mathbf{u}_k = \mathbf{u}_k - \mathbf{u}_{k-1}$ ,  $\Delta \mathbf{u}_{\min}$ ,  $\Delta \mathbf{u}_{\max}$ ,  $\mathbf{u}_{\min}$ ,  $\mathbf{u}_{\max}$ ,  $\mathbf{y}_{\min}$ ,  $\mathbf{y}_{\max}$  – ograniczenia dolne i górne odpowiednio: zmian sygnałów sterujących, wartości sygnałów sterujących, wartości wyjść obiektu.

W celu uproszczenia zapisu na razie nie będziemy zajmować się przypadkiem, w którym są uwzględniane ograniczenia nałożone na wyjścia obiektu regulacji. Rozważania na ten temat zostaną przedstawione w dalszej części niniejszej pracy.

#### 4.2.1. Algorytm regulacji predykcyjnej z ograniczeniem na stan końcowy

Opisywana metoda była pierwszym sposobem zapewnienia stabilności układu regulacji z algorytmem predykcyjnym. Jej początki sięgają drugiej połowy lat 70-tych ubiegłego stulecia. Kwon i Pearson zaproponowali tę metodę dla układów regulacji obiektów ciągłych [45] oraz obiektów dyskretnych [46]. Prace te były rozszerzeniem wyników Kleinman'a uzyskanych dla regulatorów z przesuwany horyzontem [42, 43] oraz wcześniejszych prac Kwon'a i Pearson'a [44]. Omawiane podejście dla układu ciągłego i z modelem nieliniowym zostało opisane w [16, 70]. Dla przypadku układów dyskretnych, z modelem nieliniowym, kluczową pracą był artykuł [41], zawierający dokładną analizę stabilności tego typu układów regulacji.

W pracy [22] podejście to zastosowano do zmodyfikowania algorytmu GPC, nowy algorytm nazywając CRHPC, w [76] analizowano analogiczny problem (z modelem typu wejście-wyjście wykorzystywanym do predykcji), a powstały algorytm nazwano SIORHC. W obydwu przypadkach rozważano problem bez ograniczeń innych niż stabilizujące, a zaprezentowane dowody stabilności polegają na sprowadzeniu problemu do postaci rozważanej przez Kwon'a i Pearson'a w [44] oraz w [46] lub do regulatora deadbeat (w zależności od przyjętych horyzontów). Mniej restrykcyjne dowody stabilności układów regulacji z algorytmem SIORHC oraz zastosowanie w tym algorytmie innego rodzaju modelu niż poprzednio, zostały zaprezentowane w [7, 18].

Tutaj jest rozważane zastosowanie omawianej metody w przypadku problemu z ograniczeniami i rozwiązywaniem zadania optymalizacji w każdym kroku działania regulatora. Modyfikacja mająca na celu zapewnienie stabilności projektowanego układu regulacji, polega na dodaniu do zadania optymalizacji (4.10) ograniczenia równościowego nałożonego na stan końcowy:

$$\mathbf{x}_{k+p+1|k} = \mathbf{0}. \quad (4.11)$$

W ogólnym przypadku zakładamy, że po  $s$  krokach ( $s$  – horyzont sterowania,  $s \leq p$ ) licząc od chwili obecnej  $k$ , sygnały sterujące nie będą się zmieniać, tzn.  $\mathbf{u}_{k+s|k} = \mathbf{u}_{k+s+1|k} = \dots = \mathbf{0}$ . W niektórych odmianach tego algorytmu przyjmowany jest horyzont sterowania równy horyzontowi predykcji, np. w algorytmie CRHPC [22].

#### **Twierdzenie 4.2.**

Niech będą spełnione następujące założenia:

1. Obiekt regulacji (4.9) jest sterowalny i obserwowalny;
2. Punkt równowagi jest dopuszczalny;
3. W każdym kroku zadanie (4.10) ma rozwiązanie dopuszczalne.

Wówczas układ regulacji z regulatorem realizującym algorytm polegający na rozwiązywaniu w każdym kroku zadania (4.10) przy ograniczeniu (4.11) jest asymptotycznie stabilny.

#### **Dowód**

Do udowodnienia stabilności powstałego układu regulacji skorzystamy z drugiej metody Lapunowa (twierdzenie 4.1) i spostrzeżenia, że wystarczy udowodnić, że wskaźnik jakości z zadania (4.10) jest funkcją Lapunowa badanego układu regulacji. Zauważmy, że

1. Wskaźnik jakości jest jednoznacznie funkcją skalarną wektora stanu  $\mathbf{x}_k$ , ciągłą i dodatnio określoną względem  $\mathbf{x}_k$ , czyli

$$J(\mathbf{x}_k) > 0 \text{ dla } \mathbf{x}_k \neq \mathbf{0}, \quad (4.12)$$

ze względu na dodatnią określoność macierzy  $\mathbf{Q}$  i

$$J(\mathbf{x}_k) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x}_k = \mathbf{0}, \quad (4.13)$$

ponieważ jeśli stan układu jest w punkcie równowagi, to aby zminimalizować wskaźnik jakości z zadania (4.10), sterowania nie powinny być zmieniane.

2. Wartość wskaźnika jakości dąży do nieskończoności jeśli  $\|\mathbf{x}_k\| \rightarrow \infty$ , tzn.

$$J(\mathbf{x}_k) \rightarrow \infty \text{ jeśli } \|\mathbf{x}_k\| \rightarrow \infty. \quad (4.14)$$

W takim razie są spełnione warunki 1 – 3 z twierdzenia 4.1.

Jeśli teraz udowodnimy, że wskaźnik jakości nie rośnie w czasie, to dowiedzimy tym samym, że jest on funkcją Lapunowa badanego układu.

Optymalna wartość wskaźnika jakości otrzymana w chwili  $k$  jest dana wzorem:

$$J^*(k) = \sum_{j=0}^p \mathbf{x}_{k+j|k}^{*\top} \mathbf{Q} \mathbf{x}_{k+j|k}^* + \sum_{j=0}^{s-1} \mathbf{u}_{k+j|k}^{*\top} \mathbf{R} \mathbf{u}_{k+j|k}^* , \quad (4.15)$$

gdzie  $\mathbf{u}_{k+j|k}^*$  – optymalne wektory sterowania wyznaczone w chwili  $k$ ,  $\mathbf{x}_{k+j|k}^*$  – wektory stanu otrzymane po zastosowaniu wyznaczonego ciągu sterowań optymalnych, przewidywane w chwili  $k$ ,  $J^*(k) = J(\mathbf{x}_k)$ .

Wartość wskaźnika jakości w kolejnej chwili, otrzymana w wyniku zastosowania w dalszym ciągu sterowań wyznaczonych w chwili  $k$  przy założeniu, że dysponujemy dokładnym modelem procesu jest dana wzorem:

$$J(k+1) = \sum_{j=1}^p \mathbf{x}_{k+j|k}^{*\top} \mathbf{Q} \mathbf{x}_{k+j|k}^* + \sum_{j=1}^{s-1} \mathbf{u}_{k+j|k}^{*\top} \mathbf{R} \mathbf{u}_{k+j|k}^* , \quad (4.16)$$

Zauważmy, że w przypadku, gdy ograniczenia nie są zmieniane, to użyta sekwencja sterowań jest nadal dopuszczalna. Ponadto ograniczenie nałożone na stan końcowy obiektu jest spełnione, dlatego górna granica sumowania pierwszego członu we wskaźniku jakości jest równa  $p$ . Równość (4.16) można zapisać nieco inaczej:

$$J(k+1) = J^*(k) - \mathbf{x}_k^\top \mathbf{Q} \mathbf{x}_k - \mathbf{u}_k^\top \mathbf{R} \mathbf{u}_k . \quad (4.17)$$

Jeśli w kolejnej chwili próbkowania zostanie rozwiązane zadanie optymalizacji, to otrzymana optymalna wartość funkcji celu  $J(\mathbf{x}_{k+1}) = J^*(k+1)$  będzie niewiększa od wartości  $J(k+1)$  ze wzoru (4.16). W takim razie jest prawdziwa zależność:

$$J^*(k+1) - J^*(k) \leq -\mathbf{x}_k^\top \mathbf{Q} \mathbf{x}_k - \mathbf{u}_k^\top \mathbf{R} \mathbf{u}_k . \quad (4.18)$$

Ponieważ prawa strona nierówności (4.18) będzie zawsze niedodatnia, a równa 0 tylko dla  $\mathbf{x}_k = \mathbf{0}$  (ze względu na dodatnią określoność macierzy  $\mathbf{Q}$  i  $\mathbf{R}$ ), więc fakt że zachodzi nierówność (4.18) oznacza, że funkcja  $W(\mathbf{x}_k) = J^*(k+1) - J^*(k) = J(\mathbf{x}_{k+1}) - J(\mathbf{x}_k)$  jest funkcją ujemnie określoną względem stanu  $\mathbf{x}_k$ . W takim razie układ regulacji z opisanym powyżej regulatorem, jest stabilny asymptotycznie.

Zauważmy ponadto, że ciąg  $J(\mathbf{x}_{k+j})$  dla  $j = 0, 1, \dots$  jest nierosnący, co wynika wprost z nierówności (4.18). Ponieważ spełniona jest zależność  $J(\mathbf{x}_{k+j}) \geq 0$ , to na mocy twierdzenia o ciągu monotonicznym, ciąg  $J(\mathbf{x}_{k+j})$  jest zbieżny, co więcej jest on zbieżny do 0. W takim razie ponieważ

$$J(\mathbf{x}_k) - J(\mathbf{x}_{k+1}) \geq \mathbf{x}_k^\top \mathbf{Q} \mathbf{x}_k + \mathbf{u}_k^\top \mathbf{R} \mathbf{u}_k , \quad (4.19)$$

to na mocy twierdzenia o trzech ciągach, dla  $k \rightarrow \infty$  składniki  $\mathbf{x}_k^\top \mathbf{Q} \mathbf{x}_k$  i  $\mathbf{u}_k^\top \mathbf{R} \mathbf{u}_k$  dążą do 0, a ze względu na dodatnią określoność macierzy  $\mathbf{Q}$  i  $\mathbf{R}$ ,  $\mathbf{x}_k$  i  $\mathbf{u}_k$  też dążą do 0.

Powyżej udowodniono, że układ regulacji z proponowanym algorytmem jest asymptotycznie stabilny. W dalszej części pracy zostanie przedstawiony sposób adaptacji tego podejścia w przypadku algorytmu DMC (rozd. 4.3.1). Teraz natomiast zostanie omówiona kolejna metoda formułowania algorytmu regulacji predykcyjnej zapewniająca stabilność układu regulacji z tym algorytmem.

#### 4.2.2. Algorytm regulacji predykcyjnej z nieskończonym horyzontem

W niniejszym rozdziale zostanie omówiona metoda zaproponowana przez Muske i Rawlings'a, polegająca na przyjęciu nieskończonego horyzontu predykcyjnego w zadaniu (4.10), tzn.  $p = \infty$  [92]. O różnych aspektach stosowania swojej metody wymieni autorzy piszą w [78], zaś o sposobie implementacji algorytmu w [77]. W [109] Zheng i Morari przedstawili wersję algorytmu z relaksacją ograniczeń nałożonych na wyjścia obiektu regulacji (rozdz. 4.2.5). Algorytm z nieskończonym horyzontem dla dyskretnych obiektów nieliniowych został przedstawiony w [72].

Analogiczne podejście zostało także zastosowane w przypadku układu regulacji z algorytmem predykcyjnym bazującym na modelu typu wejście–wyjście. Ponieważ zaproponowana metoda polegała na odpowiedniej modyfikacji algorytmu typu GPC, więc zmodyfikowany algorytm został przez autorów nazwany  $GPC^\infty$  lub Infinite Horizon GPC [96]. Dowód stabilności zaprezentowany w przytoczonym artykule jest analogiczny do tego z artykułu [92], jednak zawiera nadmiarowy element (nie jest on konieczny do udowodnienia stabilności układu regulacji z tym algorytmem) w postaci ograniczenia równościowego nałożonego na uchyb regulacji, a tym samym na wartość wyjścia obiektu regulacji. Warto jednak zaznaczyć, że podczas implementacji algorytmu, ograniczenie to jest potrzebne [95].

W niniejszym rozdziale jest rozważany przypadek algorytmów opartych na modelu stanowym obiektu regulacji, w których przyjmuje się nieskończony horyzont predykcyjny. W każdym kroku działania regulatora jest więc minimalizowany następujący wskaźnik jakości:

$$J = \sum_{j=0}^{\infty} \left( \mathbf{x}_{k+j|k}^T \mathbf{Q} \mathbf{x}_{k+j|k} + \mathbf{u}_{k+j|k}^T \mathbf{R} \mathbf{u}_{k+j|k} \right), \quad (4.20)$$

przy ograniczeniach (4.10a–c).

Powyższy wskaźnik jakości jest podstawowym wskaźnikiem przyjmowanym w podejściu bazującym na modelu stanowym, oczywiście możliwe jest przyjęcie innych wskaźników jakości przy zachowaniu stabilności układu regulacji z algorytmem predykcyjnym z nieskończonym horyzontem [53, 78], m. in. wskaźników, w których drugi człon jest karą za przyrosty sterowania. Tego rodzaju wskaźnik jakości będzie omówiony przy okazji adaptacji omawianej metody do algorytmu DMC.

Tak, jak w poprzednim podejściu założono, że po  $s$  krokach licząc od chwili obecnej  $k$ , sygnały sterujące nie będą się zmieniać, tzn.  $\mathbf{u}_{k+s|k} = \mathbf{u}_{k+s+1|k} = \dots = \mathbf{0}$ . Założenie to jest konieczne w przypadku omawianego algorytmu, żeby można było rozwiązać zadanie optymalizacji.

#### Twierdzenie 4.3.

Jeśli są spełnione założenia 1–3 z twierdzenia 4.2, to układ regulacji z algorytmem polegającym na rozwiązywaniu zadania optymalizacji (4.20) jest asymptotycznie stabilny.

#### Dowód

Dowód twierdzenia jest podobny do zastosowanego w przypadku poprzednio omawianego algorytmu (twierdzenie 4.2) i również bazuje na drugiej metodzie Lapunowa (twierdzenie 4.1) oraz korzysta z rozważań zaprezentowanych w [92].

Pierwsze trzy warunki (4.12), (4.13) i (4.14) tak, jak w poprzednim przypadku są przez wskaźnik jakości spełnione. Teraz udowodnimy, że wskaźnik jakości nie rośnie w czasie, dowodząc tym samym, że jest on funkcją Lapunowa badanego układu. Wartość optymalna wskaźnika jakości w chwili  $k$  jest tym razem dana wzorem:

$$J^*(k) = \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{x}_{k+j|k}^{*\top} \mathbf{Q} \mathbf{x}_{k+j|k}^* + \sum_{j=0}^{s-1} \mathbf{u}_{k+j|k}^{*\top} \mathbf{R} \mathbf{u}_{k+j|k}^*. \quad (4.21)$$



Ze względu na przyjęte założenie o skończonym horyzoncie sterowania, druga suma ma skończoną liczbę składników. Wartość wskaźnika jakości w następnej chwili, jeśli w dalszym ciągu będziemy korzystać ze sterowań wyznaczonych w chwili  $k$  przy założeniu, że dysponujemy dokładnym modelem analogicznie, jak w przypadku z rozdz. 4.2.1, można zapisać wzorem:

$$J(k+1) = J^*(k) - \mathbf{x}_k^T \mathbf{Q} \mathbf{x}_k - \mathbf{u}_k^T \mathbf{R} \mathbf{u}_k. \quad (4.22)$$

Po rozwiązaniu zadania optymalizacji w kolejnej chwili, otrzymamy zależność:

$$J^*(k+1) - J^*(k) \leq -\mathbf{x}_k^T \mathbf{Q} \mathbf{x}_k - \mathbf{u}_k^T \mathbf{R} \mathbf{u}_k. \quad (4.23)$$

W takim razie funkcja  $W(\mathbf{x}_k) = J^*(k+1) - J^*(k) = J(\mathbf{x}_{k+1}) - J(\mathbf{x}_k)$  jest funkcją ujemnie określoną względem stanu  $\mathbf{x}_k$ . Z tego wynika asymptotyczna stabilność badanego układu regulacji.

Rozumowanie takie, jak w dowodzie z rozdz. 4.2.1 prowadzi do wniosku, że dla  $k \rightarrow \infty$  składniki  $\mathbf{x}_k^T \mathbf{Q} \mathbf{x}_k$  i  $\mathbf{u}_k^T \mathbf{R} \mathbf{u}_k$  dążą do 0, a ze względu na dodatnią określoność macierzy  $\mathbf{Q}$  i  $\mathbf{R}$ ,  $\mathbf{x}_k$  i  $\mathbf{u}_k$  też dążą do 0.

Zastosowanie wyżej opisanej metody oprócz przyjęcia skończonego horyzontu sterowania wymaga także sprowadzenia tego algorytmu do algorytmu z karą za stan końcowy. Poniżej zostanie to zagadnienie omówione przy okazji opisanie innych sposobów modyfikacji algorytmów predykcyjnych zapewniających stabilność układów regulacji wykorzystujących te algorytmy.

### 4.2.3. Inne algorytmy regulacji predykcyjnej zapewniające stabilność układów regulacji

Najpierw zostanie omówiony algorytm regulacji predykcyjnej z karą za stan końcowy. Algorytm ten może być sformułowany wprost (bez rozpoczynania rozważań od algorytmu z nieskończonym horyzontem) [15, 54, 55]. Jednak jak wcześniej wspomniano, podejście przedstawione w rozdz. 4.2.2 może zostać przekształcone do równoważnego problemu z dodaną karą za stan końcowy i właściwie dopiero wtedy zastosowane [77]. W tym kontekście metoda ta zostanie tu zaprezentowana.

Przyjmijmy założenie, że obiekt regulacji jest stabilny. Przypadek ten interesuje nas szczególnie, ponieważ modele używane w algorytmie regulacji DMC nadają się jedynie do opisu tego typu obiektów.

Łatwo jest pokazać, że wskaźnik jakości (4.20) jest równoważny wskaźnikowi [77]:

$$J = \mathbf{x}_{k+s|k}^T \bar{\mathbf{Q}} \mathbf{x}_{k+s|k} + \sum_{j=1}^{s-1} \mathbf{x}_{k+j|k}^T \mathbf{Q} \mathbf{x}_{k+j|k} + \sum_{j=1}^{s-1} \mathbf{u}_{k+j|k}^T \mathbf{R} \mathbf{u}_{k+j|k}, \quad (4.24)$$

gdzie macierz  $\bar{\mathbf{Q}}$  można otrzymać w wyniku rozwiązania dyskretnego równania Lapunowa:

$$\bar{\mathbf{Q}} = \sum_{j=0}^{\infty} (\mathbf{A}^T)^j \mathbf{Q} \mathbf{A}^j = \mathbf{Q} + \mathbf{A}^T \bar{\mathbf{Q}} \mathbf{A}. \quad (4.25)$$

Trzeba w tym miejscu zaznaczyć, że w przypadku obiektów niestabilnych przekształcenie jest bardziej skomplikowane, a ponadto do otrzymanego zadania optymalizacji trzeba dodać ograniczenia równościowe zerujące niestabilne mody obiektu. Rozważania dotyczące przekształcenia algorytmu z nieskończonym horyzontem do algorytmu z karą za stan końcowy dla obiektu niestabilnego, można znaleźć w [77, 78, 92].

Kolejną metodą zapewniania stabilności układu regulacji z algorytmem predykcyjnym jest dodanie w jego sformułowaniu ograniczenia sprowadzającego stan końcowy do pewnego zbioru (ang. terminal constraint set). Zadaniem regulatora predykcyjnego jest więc doprowadzenie stanu obiektu do założonego otoczenia punktu równowagi. Podejście to zostało zaproponowane w [74] dla ciągłych obiektów nieliniowych i nazwane dual-mode MPC. Miało ono na celu osłabienie ograniczenia równościowego nałożonego na stan końcowy (4.11) czyniącego problem optymalizacji trudnym do rozwiązania.

Jednak taka modyfikacja algorytmu w ogólności pociąga za sobą utratę stabilności wewnątrz założonego otoczenia, stąd wynika potrzeba wprowadzenia dodatkowego regulatora. Najczęściej jest w tym celu stosowany odpowiednio zaprojektowany regulator ze sprzężeniem od stanu obiektu stabilizujący obiekt regulacji w otoczeniu punktu równowagi, w którym działa.

Trzeba w tym miejscu zaznaczyć, że główną trudnością przy stosowaniu tego typu algorytmu jest wyznaczenie takiego zbioru zawierającego otoczenie punktu równowagi, że stan obiektu poddanego działaniu regulatora stabilizującego nie opuszcza tego zbioru, układ złożony z obiektu i regulatora stabilizującego jest wewnątrz tego zbioru stabilny, a ponadto zbiór ten jest zawarty w obszarze dopuszczalnym określonym przez przyjęte ograniczenia. Więcej informacji na temat tej metody jest przedstawionych w rozdz. 4.5 przy okazji jej wykorzystania w przypadku algorytmów FDMC.

Istnieje także odmiana algorytmów predykcyjnych, które wykorzystują ograniczenie wymuszające malenie normy wektora stanu obiektu regulacji (ang. contraction constraint) [86, 87]:

$$\|\mathbf{x}_{k+1}\| \leq \alpha \|\mathbf{x}_k\|, \quad (4.26)$$

gdzie  $\alpha \in (0, 1)$ .

Ponieważ algorytmy te wykorzystują ciągły model obiektu regulacji, ale z dyskretnym w czasie rozwiązywaniem zadania optymalizacji, dlatego dodawane jest jeszcze drugie ograniczenie, wymuszające odpowiednie zachowanie stanu obiektu pomiędzy chwilami próbkowania regulatora:

$$\|\mathbf{x}_k(t)\| \leq \beta \|\mathbf{x}_k\|, \quad (4.27)$$

gdzie  $\beta \in [1, \infty)$ ,  $t \in [t_k, t_{k+1}]$ .

Algorytm tego typu dla obiektów liniowych został opracowany przez Polak'a i Yang'a i opisany w [86, 87] zaś dla obiektów nieliniowych w [108]. Tego typu podejścia dla obiektów nieliniowych dotyczy praca [24], w której autorzy przedstawili dalszą analizę algorytmu zauważając i dowodząc, że zapewnia on nie tylko asymptotyczną, ale także wykładniczą stabilność.

Warto wspomnieć o jeszcze jednym oprócz wyżej wymienionych, podobnym do ostatniego, sposobie zapewniania stabilności. Można mianowicie dodać bezpośrednio do problemu optymalizacji ograniczenie zapewniające malenie pewnej odpowiednio dobranej funkcji pomyslanej jako funkcja Lapunowa układu regulacji z algorytmem predykcyjnym i nazywanej sztuczną funkcją Lapunowa (ang. artificial Lyapunov function). Takiego typu podejście dla obiektów liniowych, dyskretnych zostało opisane w [5].

#### 4.2.4. Suboptymalne algorytmy regulacji predykcyjnej

Rozwiązanie omówione w niniejszym rozdziale zostało przedstawione w pracy [97]. Sposób ten opiera się na spostrzeżeniu, że stabilność układu regulacji z algorytmem predykcyjnym polegającym na rozwiązywaniu zadania optymalizacji w każdym kroku działania regu-

latora może być, w przypadku gdy dysponujemy dokładnym modelem obiektu regulacji, zapewniona dopuszczalnością rozwiązań tego zadania optymalizacji. Wtedy, jeśli ograniczenia nie będą zmienne w czasie, to wyznaczenie w pierwszym kroku algorytmu zestawu sterowań spełniających narzucone ograniczenia oznacza, że układ regulacji z rozważanym algorytmem jest stabilny. Trzeba jednak zaznaczyć, że aby uzyskać taki rezultat, do zbioru ograniczeń należy dodać równościowe lub nierównościowe ograniczenie stabilizujące nałożone na stan końcowy [97].

Prześledźmy teraz algorytm z nierównościowym ograniczeniem stabilizującym oparty na idei zaproponowanej w [74]. Na jego podstawie, lecz z istotnymi zmianami, zostały opracowane regulatory FDMC zapewniające stabilność układów regulacji, w których zostały użyte. Algorytm ten omówiono w rozdz. 4.5.

Przyjmijmy, że w każdym kroku działania algorytmu regulacji jest rozwiązywane następujące zadanie optymalizacji nieliniowej:

$$\min_{\mathbf{u}} \phi = \sum_{j=0}^{p-1} \theta(\mathbf{x}_{k+j|k}) \cdot (\mathbf{x}_{k+j|k}^T \mathbf{Q} \mathbf{x}_{k+j|k} + \mathbf{u}_{k+j|k}^T \mathbf{R} \mathbf{u}_{k+j|k}), \quad (4.28)$$

przy ograniczeniach:

$$\mathbf{x}_{k+1} = f(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k), \quad (4.28a)$$

$$\mathbf{x}_{k+p} \in W, \quad (4.28b)$$

$$\Delta \mathbf{u}_{\min} \leq \Delta \mathbf{u}_{k+j|k} \leq \Delta \mathbf{u}_{\max}, \quad (4.28c)$$

$$\mathbf{u}_{\min} \leq \mathbf{u}_{k+j|k} \leq \mathbf{u}_{\max}, \quad (4.28d)$$

$$\mathbf{g}_{\min} \leq \mathbf{G} \mathbf{x}_{k+j|k} \leq \mathbf{g}_{\max}, \quad (4.28d)$$

gdzie  $\theta(\mathbf{x}_{k+j|k}) = \begin{cases} 0; & \mathbf{x}_{k+j|k} \in W \\ 1; & \mathbf{x}_{k+j|k} \notin W \end{cases}$ , a pierwsze ograniczenie (4.28a) wynika z przyjętego modelu

obiektu regulacji. W dalszej części rozważań założono, że jest dokładnie znany model procesu. Drugie z ograniczeń (4.28b) jest ograniczeniem stabilizującym, gdzie  $W$  jest zbiorem wypukłym i niezmiennym w czasie. Po dojściu stanu procesu do tego zbioru, jest włączany odpowiednio dobrany regulator ze sprzężeniem od stanu stabilizujący obiekt regulacji wewnątrz tego zbioru [74]. Oznaczmy ten regulator przez  $\mathbf{u} = h_L(\mathbf{x})$ . Rozważmy następujący algorytm wyznaczania sterowań:

1. Niech  $\mu \in (0,1]$ .
2. W chwili  $k = 0$  jest znany stan  $\mathbf{x}_0$ . Jeśli  $\mathbf{x}_0 \in W$ , to  $\mathbf{u}_0 = h_L(\mathbf{x}_0)$ . W przeciwnym przypadku, na podstawie stanu  $\mathbf{x}_0$  jest wyznaczana sekwencja przyszłych sterowań  $\boldsymbol{\pi}_0 = \{\mathbf{u}_{0|0}, \mathbf{u}_{1|0}, \dots, \mathbf{u}_{p-1|0}\}$  i odpowiadająca jej sekwencja stanu  $\{\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_{1|0}, \dots, \mathbf{x}_{p|0}\}$  spełniające założone w zadaniu optymalizacji (4.28) ograniczenia. Do sterowania jest używane  $\mathbf{u}_0 = \mathbf{u}_{0|0}$ .
3. W chwili  $k$  jest znany stan  $\mathbf{x}_k$ . Jeśli  $\mathbf{x}_k \in W$ , to  $\mathbf{u}_k = h_L(\mathbf{x}_k)$ . W przeciwnym przypadku, jest wyznaczana sekwencja sterowań  $\boldsymbol{\pi}_k = \{\mathbf{u}_{k|k}, \mathbf{u}_{k+1|k}, \dots, \mathbf{u}_{k+p-1|k}\}$  i odpowiadająca jej sekwencja stanu  $\{\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_{k+1|k}, \dots, \mathbf{x}_{k+p|k}\}$ , spełniające założone w zadaniu optymalizacji ograniczenia a ponadto nierówność:

$$\phi_k(\mathbf{x}_k, \boldsymbol{\pi}_k) \leq \phi_{k-1}(\mathbf{x}_{k-1}, \boldsymbol{\pi}_{k-1}) - \mu \cdot (\mathbf{x}_{k-1}^T \mathbf{Q} \mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{u}_{k-1}^T \mathbf{R} \mathbf{u}_{k-1}). \quad (4.29)$$

Można przy tym użyć sekwencji  $\boldsymbol{\pi} = \{\mathbf{u}_{k|k-1}, \mathbf{u}_{k+1|k-1}, \dots, \mathbf{u}_{k+p-2|k-1}, h_L(\mathbf{x}_{k+N-1|k-1})\}$  jako sekwencji startowej dla procedury optymalizacji. Do sterowania jest używane  $\mathbf{u}_k = \mathbf{u}_{k|k}$ .

W przypadku przyjętych założeń, sekwencja  $\boldsymbol{\pi}$  jest dopuszczalna i spełnia przyjęte ograniczenia. Układ regulacji z regulatorem realizującym przedstawiony powyżej algorytm jest stabilny, a dowód stabilności jest podany w [97]. Tutaj przedstawimy ideę tego dowodu.

Zauważmy, że ze względu na stabilizujące działanie regulatora ze sprzężeniem od stanu  $\mathbf{u} = h_L(\mathbf{x})$ , wystarczy pokazać, że każda trajektoria rozpoczynająca się w  $\mathbf{x}_0$ , dochodzi do zbioru  $W$  w skończonym czasie. To zaś jest zapewnione dzięki przyjętym warunkom zadania, a w szczególności spełnieniu nierówności (4.29), wymuszającej malenie wartości wskaźnika jakości (4.28), jeśli stan procesu znajduje się poza zbiorem  $W$ .

#### 4.2.5. Dopuszczalność rozwiązań zadania optymalizacji w obecności ograniczeń nałożonych na wyjścia obiektu regulacji.

Jednym z założeń w dowodach stabilności przedstawionych algorytmów było to, że w każdym kroku działania algorytmu zostanie znalezione rozwiązanie zadania optymalizacji, tzn. że jest ono dopuszczalne. Problem dopuszczalności pojawia się wraz z wprowadzeniem ograniczeń do rozwiązywanego zadania. Przy czym, jeśli stabilność układu regulacji z rozwiązaniem algorytmem jest zapewniana dzięki dodaniu pewnych ograniczeń, to nie mogą one zostać osłabione bez utraty gwarancji stabilności. Oprócz ograniczeń stabilizujących można w algorytmie uwzględnić ograniczenia nałożone na sygnał sterujący i na wyjścia obiektu regulacji. Zauważmy, że te pierwsze istnieją zawsze i są odzwierciedleniem ograniczeń fizycznych, więc nie mogą zostać przekroczone. Ponadto dopuszczalność ograniczeń nałożonych na wartości oraz przyrosty sterowania zależy od właściwego sformułowania zadania i zaprojektowania układu regulacji. W takim razie, jeśli ich spełnienie będzie niemożliwe, oznacza to, że otrzymany układ sterowania nie jest w stanie wypełnić postawionego mu zadania i trzeba go zaprojektować od nowa.

Głównym problemem są więc ograniczenia nałożone na wyjścia obiektu regulacji. Jednak często można dopuścić ich naruszenie przez krótki czas i pod warunkiem, że wyjście obiektu nie przekracza zaledwie założonej wartości ograniczenia. Powstało więc kilka sposobów radzenia sobie z problemem dopuszczalności zadania optymalizacji w numerycznych wersjach algorytmów predykcyjnych.

Pierwszym z tych sposobów jest pozwolenie na złamanie ograniczeń (ich wyrzucenie z zadania optymalizacji) przez kilka pierwszych  $j_1$  chwil z horyzontu predykcji zaproponowane w przypadku algorytmu z nieskończonym horyzontem [78]. Dowiedzono przy tym dla algorytmów wykorzystujących modele liniowe obiektu, że istnieje taka liczba  $j_1$  począwszy od której ograniczenia będą już spełnione [92]. Trzeba jednak zaznaczyć, że jeśli liczba tych chwil  $j_1$  będzie zbyt mała, to zadanie może nadal nie mieć rozwiązania lub wartość wyjścia obiektu może znacznie przekroczyć ograniczenia ponieważ to właśnie w pierwszych chwilach regulacji zmiany sterowania są największe.

W związku z wadami pierwszego podejścia, można skorzystać z chyba najczęściej stosowanej metody polegającej na relaksacji ograniczeń, użytej np. w [34, 35, 105, 109]. Wówczas do wskaźnika jakości (4.10) jest dodawany składnik kary za przekroczenie ograniczeń nałożonych na stan procesu:

$$J = \sum_{j=0}^p \mathbf{x}_{k+j|k}^T \mathbf{Q} \mathbf{x}_{k+j|k} + \sum_{j=0}^{s-1} \mathbf{u}_{k+j|k}^T \mathbf{R} \mathbf{u}_{k+j|k} + \boldsymbol{\varepsilon}_k^T \mathbf{P} \boldsymbol{\varepsilon}_k, \quad (4.30)$$

gdzie  $\mathbf{P} > 0$  jest macierzą diagonalną, a w sformułowaniu zadania optymalizacji, ograniczenia nałożone na stan obiektu:

$$\mathbf{G}\mathbf{x}_{k+j|k} \leq \mathbf{g}, \quad (4.30a)$$

są modyfikowane do postaci:

$$\mathbf{G}\mathbf{x}_{k+j|k} \leq \mathbf{g} + \boldsymbol{\varepsilon}_k. \quad (4.30b)$$

Ponadto są dodawane ograniczenia:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_k \geq 0. \quad (4.30c)$$

Możliwe jest także takie sformułowanie zadania, aby ograniczeniom, które mogą zostać przekroczone zostały przyporządkowane priorytety, w zależności od których jest następnie przeprowadzane osłabianie tych ograniczeń np. przez rozwiązywanie zadania optymalizacji liniowej [103].

### 4.3. Układy regulacji z algorytmami DMC w wersji numerycznej

Niniejszy rozdział został poświęcony adaptacji metod modyfikacji algorytmów predykcyjnych zapewniających stabilność układów regulacji, w których zostały zastosowane, do algorytmu DMC. Najpierw zostanie użyta metoda z nieskończonym horyzontem, a następnie zostanie pokazane, że w rozważanym przypadku jest ona równoważna metodzie z dodanym ograniczeniem nałożonym na stan końcowy.

Założmy, że obiekt regulacji jest opisany następującym modelem:

$$y_{k+1} = y_k + \sum_{i=1}^{p_d} a_i'' \cdot \Delta u_{k-i+1}, \quad (4.31)$$

gdzie  $p_d$  – horyzont dynamiki obiektu,  $a_i'' = \begin{cases} a_1; & i = 1 \\ a_i - a_{i-1}; & i > 1 \end{cases}$ , gdzie  $a_i$  – rzędne odpowiedzi skokowej obiektu regulacji.

Ponieważ model obiektu jest modelem typu wejście–wyjście, opartym na odpowiedzi skokowej, to przyjęto, że obiekt jest stabilny, sterowalny i obserwowalny. Ponadto założono, że dysponujemy dokładnym modelem obiektu regulacji, co jest często przyjmowanym założeniem w przypadku dowodzenia stabilności układów regulacji z regulatorami predykcyjnymi.

#### 4.3.1. Algorytm regulacji DMC z nieskończonym horyzontem

W niniejszym rozdziale został opisany algorytm regulacji DMC w wersji numerycznej zapewniający stabilność układu regulacji, dzięki zastosowaniu nieskończonego horyzontu.

W każdym kroku działania regulatora jest minimalizowany wskaźnik jakości:

$$\min_{\Delta \mathbf{u}} J = \sum_{i=0}^{\infty} (y_k^{zad} - y_{k+i|k})^2 + \lambda \cdot \sum_{i=0}^{s-1} (\Delta u_{k+i|k})^2, \quad (4.32)$$

przy ograniczeniach:

$$\Delta u_{\min} \leq \Delta u_{k+i|k} \leq \Delta u_{\max}, \quad (4.32a)$$

$$u_{\min} \leq u_{k+i|k} \leq u_{\max}, \quad (4.32b)$$

$$y_{\min} \leq y_{k+i|k} \leq y_{\max}, \quad (4.32c)$$

gdzie  $y_k^{zad}$  – wartość zadana,  $y_{k+i|k}$  – wartość przewidywana w chwili  $k$  dla chwili  $k+i$ ,  $\Delta u_{k+i|k}$  – przyrost sterowania wyznaczony w chwili  $k$  dla chwili  $k+i$ ,  $\lambda > 0$  – kara za zmienność sterowania. Tak samo, jak poprzednio założono, że horyzont sterowania  $s$  jest skończony (dlatego druga suma we wskaźniku jakości ma skończoną liczbę składników), czyli  $\Delta u_{k+s|k} = \Delta u_{k+s+1|k} = \dots = 0$ . Z tego wynika, że wartość sterowania przyjmuje stałą wartość dla chwili  $k+s$  i dalszych, czyli zachodzi  $u_{k+s|k} = u_{k+s+1|k} = \dots = u_s$ , gdzie  $u_s$  odpowiada na charakterystyce statycznej wartości wyjścia równej  $y^{zad}$ , bo w przeciwnym przypadku wskaźnik jakości miałby wartość nieskończoną.

Wskaźnik jakości przyjęty w problemie optymalizacji (4.32) jest standardowym wskaźnikiem używanym w algorytmie DMC i różni się od przyjętego w rozdz. 4.2, jednak w analogiczny do tam przedstawionego sposób zostanie udowodnione następujące twierdzenie.

#### Twierdzenie 4.4.

Założmy, że punkt równowagi jest dopuszczalny oraz że w każdym kroku zadanie (4.32) ma rozwiązanie dopuszczalne. Wówczas układ regulacji z regulatorem realizującym algorytm polegający na rozwiązywaniu w każdym kroku zadania (4.32) jest asymptotycznie stabilny.

#### Dowód

Posłużymy się drugą metodą Lapunowa. W celu jej zastosowania zostanie nieco zmieniony wskaźnik jakości tak, aby zawierał wszystkie elementy wektora quasi–stanu:

$$\bar{\mathbf{x}}_k = \begin{bmatrix} y_k - y^{zad} & \Delta u_{k-1} & \Delta u_{k-2} & \dots & \Delta u_{k-p_d+2} & \Delta u_{k-p_d+1} \end{bmatrix}^T, \quad (4.33)$$

którego postać wynika z przyjętego modelu (4.31). Wówczas model obiektu regulacji można przekształcić do następującej postaci:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{x}}_{k+1} &= \mathbf{A}_{DMC} \bar{\mathbf{x}}_k + \mathbf{B}_{DMC} \Delta u_k, \\ y_k^{DMC} &= \mathbf{C}_{DMC} \bar{\mathbf{x}}_k, \end{aligned} \quad (4.34)$$

gdzie

$$\mathbf{A}_{DMC} = \begin{bmatrix} 1 & a_2'' & a_3'' & \dots & a_{p_d-1}'' & a_{p_d}'' \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_{DMC} = \begin{bmatrix} a_1'' \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C}_{DMC} = [1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 0], \quad y_k^{DMC} = y_k - y^{zad}.$$

Wprowadźmy wskaźnik jakości o następującej postaci:

$$J(k) = \sum_{j=0}^{\infty} \bar{\mathbf{x}}_{k+j|k}^T \mathbf{Q}_{DMC} \bar{\mathbf{x}}_{k+j|k} + \lambda \cdot \sum_{i=2}^{p_d-1} \frac{i-1}{p_d-1} (\Delta u_{k-i})^2, \quad (4.35)$$

gdzie  $\mathbf{Q}_{DMC}$  jest macierzą diagonalną daną wzorem:

$$\mathbf{Q}_{DMC} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \frac{\lambda}{p_d - 1} & & & & \\ & & \frac{\lambda}{p_d - 1} & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & \frac{\lambda}{p_d - 1} & \\ & & & & & \frac{\lambda}{p_d - 1} \end{bmatrix}. \quad (4.36)$$

Zauważmy, że ponieważ:

$$\bar{\mathbf{x}}_{k+i|k} = \begin{bmatrix} y_{k+i|k} - y^{zad} & \Delta u_{k+i-1|k} & \Delta u_{k+i-2|k} & \dots & \Delta u_{k+i-p_d+2|k} & \Delta u_{k+i-p_d+1|k} \end{bmatrix}^T, \quad (4.37)$$

to w wyniku mnożenia  $\bar{\mathbf{x}}_{k+i|k}^T \mathbf{Q}_{DMC} \bar{\mathbf{x}}_{k+i|k}$ , otrzymamy:

$$\bar{\mathbf{x}}_{k+i|k}^T \mathbf{Q}_{DMC} \bar{\mathbf{x}}_{k+i|k} = (y^{zad} - y_{k+i|k})^2 + \frac{\lambda}{p_d - 1} \cdot \left[ (\Delta u_{k+i-1|k})^2 + \dots + (\Delta u_{k+i-p_d+1|k})^2 \right]. \quad (4.38)$$

Z założenia o skończonym horyzoncie sterowania wynika, że  $\Delta u_{k+s|k} = \Delta u_{k+s+1|k} = \dots = 0$ . W takim razie otrzymamy ostatecznie wskaźnik jakości:

$$J(k) = \sum_{i=0}^{\infty} (y^{zad} - y_{k+i|k})^2 + \lambda \cdot \sum_{i=0}^{s-1} (\Delta u_{k+i|k})^2 + \lambda \cdot \sum_{i=1}^{p_d-1} (\Delta u_{k-i})^2. \quad (4.39)$$

Do wskaźnika jakości z zadania (4.32) została więc dodana suma zależna od przeszłych zmian sterowania (będących elementami przyjętego wektora quasi-stanu). Nie wpływa ona jednak na rozwiązanie zadania optymalizacji, ponieważ jest liczbą o znanej wartości zależnej od przeszłych przyrostów sterowania. W takim razie można ten człon wyeliminować ze wskaźnika jakości podczas implementacji algorytmu. Zauważmy, że wskaźnik jakości (4.39) jest funkcją dodatnio określoną względem quasi-stanu  $\bar{\mathbf{x}}_k$ . Ponadto wartość wskaźnika jakości dąży do nieskończoności jeśli  $\|\bar{\mathbf{x}}_k\| \rightarrow \infty$ .

Zastosujmy teraz rozumowanie analogiczne, jak w dowodach poprzednich twierdzeń. Optymalna wartość wskaźnika jakości w chwili  $k$  jest dana wzorem:

$$J^*(k) = \sum_{j=0}^{\infty} (y^{zad} - y_{k+j|k}^*)^2 + \lambda \cdot \sum_{i=0}^{s-1} (\Delta u_{k+i|k}^*)^2 + \lambda \cdot \sum_{i=1}^{p_d-1} (\Delta u_{k-i})^2. \quad (4.40)$$

Wartość wskaźnika jakości w chwili  $k+1$ , przy założeniu, że dysponujemy dokładnym modelem i korzystamy w dalszym ciągu ze sterowań wyznaczonych w chwili  $k$ , jest dana wzorem:

$$J(k+1) = \sum_{j=1}^{\infty} (y^{zad} - y_{k+j|k}^*)^2 + \lambda \cdot \sum_{i=0}^{s-1} (\Delta u_{k+i|k}^*)^2 + \lambda \cdot \sum_{i=1}^{p_d-2} (\Delta u_{k-i})^2. \quad (4.41)$$

Powyższą równość można zapisać jako:

$$J(k+1) = J^*(k) - (y^{zad} - y_k)^2 - \lambda \cdot (\Delta u_{k-p_d+1})^2. \quad (4.42)$$

Dla optymalnej wartości funkcji celu otrzymanej w kolejnej chwili  $J^*(k+1)$  jest prawdziwa zależność:

$$J^*(k+1) - J^*(k) \leq -(y^{zad} - y_k)^2 - \lambda \cdot (\Delta u_{k-p_d+1})^2. \quad (4.43)$$

W takim razie funkcja  $W(\bar{x}_k) = J^*(k+1) - J^*(k)$  jest funkcją ujemnie określoną względem quasi-stanu  $\bar{x}_k$ , czyli wskaźnik jakości  $J(k)$  jest dla badanego układu funkcją Lapunowa, z czego wynika stabilność tego układu.

Ponieważ ciąg  $J^*(k+j)$  jest zbieżny (argumenty te same, co w dowodzie przedstawionym w rozdz. 4.2.2), to na mocy twierdzenia o trzech ciągach, dla  $k \rightarrow \infty$  składniki  $(y^{zad} - y_k)^2$  i  $\lambda \cdot (\Delta u_{k-p_d+1})^2$  dążą do 0, a w takim razie  $y_k$  dąży do  $y^{zad}$  oraz ze względu na to, że  $\lambda > 0$   $\Delta u_{k-p_d+1}$  dąży do 0 i tym samym  $\Delta u_k$  dąży do 0. To z kolei implikuje dążenie  $u_k$  do wartości  $u_s$  (przypomnijmy, że odpowiada ona wartości wyjścia równej  $y^{zad}$ ) ponieważ w przeciwnym przypadku wskaźnik jakości miałby wartość nieskończoną.

Układ regulacji, w którym zostanie użyty proponowany algorytm będzie więc stabilny, jednak żeby możliwa była jego implementacja, wskaźnik jakości musi zostać przekształcony do postaci skończonej sumy odpowiednich składników. Zostało to opisane dalej.

#### 4.3.2. Algorytm regulacji DMC z ograniczeniem nałożonym na stan końcowy

Zadanie z rozdz. 4.3.1 można sformułować wykorzystując ograniczenie stabilizujące nałożone na wartość końcową wyjścia obiektu regulacji. Wystarczy przy tym zauważyć, że ze względu na przyjęcie skończonego horyzontu sterowania, przewidywane w chwili  $k$  wartości wyjścia obiektu dla chwil od  $k+p_d+s-1$  począwszy, nie zmieniają się i są równe  $y_{k+p_d+s-1|k} = y_{k+p_d+s|k} = \dots = y^{zad}$ . W praktyce, ze względu na postać modelu (bazuje on na skończonej odpowiedzi skokowej) wystarczy więc zażądać, wprowadzając odpowiednie ograniczenie równościowe, aby wyznaczone przyrosty sterowania przyjęły takie wartości, że:

$$u_{k-1} + \sum_{i=0}^{s-1} \Delta u_{k+i|k} = u_s. \quad (4.44)$$

Przy wprowadzonych założeniach wystarczy teraz sformułować zadanie optymalizacji, którego wskaźnik jakości przyjmie podaną niżej postać:

$$J = \sum_{i=0}^{p_d+s-2} (y_k^{zad} - y_{k+i|k})^2 + \lambda \cdot \sum_{i=0}^{s-1} (\Delta u_{k+i|k})^2, \quad (4.45)$$

przy ograniczeniach (4.32a–c) i (4.44),

gdzie  $y_{k+i|k} = y_k + \sum_{j=i+1}^{p_d-1} a_j \cdot \Delta u_{k-j+i} + a_{p_d} \cdot \sum_{j=p_d}^{p_d+i-1} \Delta u_{k-j+i} - \sum_{j=1}^{p_d-1} a_j \cdot \Delta u_{k-j} + \sum_{j=1}^i a_j \cdot \Delta u_{k-j+i|k}$  oraz

przypomnijmy, że  $\Delta u_{k+s|k} = \Delta u_{k+s+1|k} = \dots = 0$ .



Ze względu na ograniczenie (4.44) oraz skończony horyzont sterowania  $s$ , począwszy od  $i = p_d + s - 1$ ,  $y_{k+i|k} = a_{p_d} u_s$ , co jest równoważne zależności  $y_{k+i|k} = y^{zad}$ . W takim razie, we wskaźniku jakości (4.32) składniki z pierwszej sumy począwszy od  $(p_d + s - 1)$ -ego są równe zeru i dlatego we wskaźniku jakości (4.45) górną granicą pierwszego sumowania jest  $p_d + s - 2$ .

Łatwo zauważyć, że omawiany problem można też traktować jako zadanie z dodaną karą za stan końcowy (złożoną ze składników pierwszej sumy poczynając od  $s$ -tego, na  $(p_d + s - 2)$ -gim kończąc) oraz równościowym ograniczeniem stabilizującym (4.44). Wynika z tego, że różne sposoby zapewniania stabilności układu regulacji z algorytmem DMC w wersji z optymalizacją są sobie równoważne, przy odpowiednim doborze parametrów regulatora.

Dalej zostało opisane zagadnienie badania i zapewniania stabilności układów regulacji z rozmytymi regulatorami predykcyjnymi (w szczególności FDMC), w wersji zarówno analitycznej, jak i numerycznej.

#### 4.4. Układy regulacji z rozmytymi regulatorami predykcyjnymi w wersji analitycznej

Tematem rozdziału jest badanie stabilności układów regulacji z rozmytymi regulatorami predykcyjnymi opartymi na sformułowaniu analitycznym. Metoda analizy została sformułowana w sposób ogólny, przy czym głównym przedmiotem zainteresowania są układy z regulatorami predykcyjnymi wykorzystującymi modele typu wejście-wyjście takimi, jak FGPC i FDMC [60, 67].

Zaprezentowana metoda korzysta z faktu, że w przypadku konwencjonalnego regulatora DMC lub innego regulatora predykcyjnego w wersji analitycznej jest on liniowy. Ideą metody jest przekształcenie układu regulacji z regulatorem rozmytym złożonym z liniowych lokalnych regulatorów predykcyjnych do takiej postaci, żeby można było zastosować do niego kryterium stabilności opracowane przez Tanakę i Sugeno przedstawione w pracy [101]. Warto też zaznaczyć, że do przekształconego układu regulacji można zastosować inne kryteria stabilności, jak również złagodzone wersje kryterium Tanaki i Sugeno.

Powstało wiele prac dotyczących analizy stabilności układów rozmytych korzystających ze wspomnianego kryterium. Większość z nich podobnie, jak [101] dotyczy układów regulacji z regulatorami ze sprzężeniem od stanu [106, 110, 111]. W pracy [100] jest badany układ regulacji z regulatorem ze sprzężeniem od stanu i obserwatorem. Praca [40] dotyczy różnych aspektów badania stabilności układów opisanych modelami Takagi-Sugeno. W niniejszym rozdziale przedstawiono podejście ukierunkowane na badanie stabilności układów regulacji z regulatorami predykcyjnymi z przesuwany horyzontem w wersji analitycznej, głównie pod kątem układów z regulatorami FDMC w wersji analitycznej.

##### 4.4.1. Kryterium stabilności dla układów opisanych modelami Takagi-Sugeno

W pracy [101] autorzy zaproponowali niżej przedstawione kryterium. Załóżmy, że rozważany układ jest opisany modelem rozmytym Takagi-Sugeno (rozd. 3) złożonym z następujących reguł:

Reguła  $i$ : jeśli  $x_k$  jest  $F_1^i$  i ... i  $x_{k-n+1}$  jest  $F_n^i$ , to

$$x_{k+1}^i = a_1^i \cdot x_k + \dots + a_n^i \cdot x_{k-n+1}, \quad (4.46)$$

gdzie  $x_k, \dots, x_{k-n+1}$  – zmienne stanu układu,  $F_1^i, \dots, F_n^i$  – zbiory rozmyte,  $i = 1, \dots, l$ ,  $l$  – liczba reguł.

Model lokalny (4.46) można zapisać w następujący sposób:

$$\mathbf{x}_{k+1}^i = \mathbf{A}_i \cdot \mathbf{x}_k, \quad (4.47)$$

$$\text{gdzie } \mathbf{x}_k = \begin{bmatrix} x_k \\ x_{k-1} \\ x_{k-2} \\ \vdots \\ x_{k-n+2} \\ x_{k-n+1} \end{bmatrix} \text{ i macierz } \mathbf{A}_i = \begin{bmatrix} a_1^i & \dots & a_{n-1}^i & a_n^i \\ 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Wówczas wyjście układu jest dane wzorem:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \sum_{i=1}^l \tilde{w}_i \cdot \mathbf{A}_i \cdot \mathbf{x}_k, \quad (4.48)$$

gdzie  $\tilde{w}_i = w_i / \sum_{i=1}^l w_i$ , a  $w_i = \prod_{j=1}^n F_j^i(x_{k-j+1})$  jest wagą  $i$ -tego modelu lokalnego.

#### **Twierdzenie 4.5.** [101]

Warunkiem wystarczającym globalnej, asymptotycznej stabilności rozważanego układu rozmytego, wynikającym z bezpośredniej metody Lapunowa (twierdzenie 4.1), jest istnienie dodatnio określonej macierzy  $\mathbf{P}$  takiej, że dla wszystkich macierzy  $\mathbf{A}_i$  są spełnione nierówności:

$$\mathbf{A}_i^T \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{A}_i - \mathbf{P} < 0 \text{ dla } i = 1, \dots, l.$$

W celu znalezienia macierzy  $\mathbf{P}$  wystarczy więc rozwiązać układ liniowych nierówności macierzowych (LMI) [100, 110] korzystając np. z toolbox-a LMI zawartego w pakiecie *Matlab*. Przedtem warto jednak sprawdzić, czy są spełnione warunki konieczne istnienia macierzy  $\mathbf{P}$  dla danego układu:

**Warunek 1:** macierz  $\mathbf{P}$  dla danego układu nie istnieje, jeśli któryś z układów lokalnych jest niestabilny;

**Warunek 2:** jeśli macierze  $\mathbf{A}_i$  są stabilne i nieosobliwe, to  $\mathbf{A}_i \cdot \mathbf{A}_j$  ( $i = 1, \dots, l, j = 1, \dots, l$ ) są macierzami stabilnymi jeśli istnieje macierz  $\mathbf{P}$ . W takim razie, jeśli któraś z macierzy  $\mathbf{A}_i \cdot \mathbf{A}_j$  jest niestabilna, to wspólna macierz  $\mathbf{P}$  z rozważanego kryterium stabilności nie istnieje [101].

#### **4.4.2. Przekształcenie układu regulacji z regulatorem i obiektem opisanymi modelami Takagi–Sugeno**

W niniejszym rozdziale opisano sposoby przekształcenia układu regulacji z regulatorem predykcyjnym, którego elementy są opisane modelami TS typu wejście–wyjście, do postaci umożliwiającej zastosowanie kryterium omówionego rozdz. 4.4.1. Transformacji układu regulacji można dokonać na dwa sposoby. Pierwsza metoda jest bardziej przejrzysta i dlatego zostanie opisana najpierw. Metoda ta korzysta z pomysłu zawartego w artykule [17]. Elementy drugiego podejścia zostały natomiast zainspirowane fragmentami pracy [26], w której jednak podano niepoprawny wynik końcowy, najprawdopodobniej na skutek pomyłki w końcowej fazie przekształceń. Ponadto rozpatrywany w niniejszej pracy przypadek jest rozszerzony ponieważ założono, że wyjście każdego z modeli lokalnych może zależeć od sterowania nie tylko w chwili obecnej, ale również od jego wartości w poprzednich chwilach. Oprócz tego w prezentowanych tutaj rozważaniach przyjęto, że w obiekcie regulacji może wystąpić opóźnienie.

Założmy, że rozpatrywany układ regulacji jest złożony z regulatora oraz obiektu regulacji opisanych modelami Takagi–Sugeno. Ponieważ rozpatrywane są układy regulacji z regulatorami predykcyjnymi, badany jest ogólny przypadek obiektu regulacji z opóźnieniem  $d$ . Model obiektu jest więc złożony z  $l_Y$  następujących reguł:

R<sub>o</sub><sup>i</sup>: jeśli  $y_k$  jest  $B_1^i$  i ... i  $y_{k-n_B+1}$  jest  $B_{n_B}^i$  i  $u_k$  jest  $C_1^i$  i ... i  $u_{k-m_C+1}$  jest  $C_{m_C}^i$  to

$$y_{k+1}^i = b_1^i \cdot y_k + \dots + b_{n_B}^i \cdot y_{k-n_B+1} + c_1^i \cdot u_{k-d} + \dots + c_{m_C}^i \cdot u_{k-d-m_C+1}, \quad (4.49)$$

gdzie  $b_1^i, \dots, b_{n_B}^i, c_1^i, \dots, c_{m_C}^i$  – współczynniki  $i$ -tego modelu lokalnego,  $y_k$  – wyjście obiektu regulacji w chwili  $k$ ,  $u_k$  – sterowanie w chwili  $k$ ,  $d$  – opóźnienie. Wyjście obiektu regulacji jest dane standardowym wzorem:

$$y_{k+1} = \sum_{i=1}^{l_Y} \tilde{w}_i \cdot y_{k+1}^i, \quad (4.50)$$

gdzie wagi  $\tilde{w}_i$  są zdefiniowane przez poziomy aktywacji poszczególnych reguł, jak w (4.48).

Regulator jest złożony z  $l_U$  reguł:

R<sub>r</sub><sup>j</sup>: jeśli  $y_k$  jest  $(B_r)_1^j$  i ... i  $y_{k-n_R+1}$  jest  $(B_r)_{n_R}^j$  i  $u_{k-1}$  jest  $(C_r)_2^j$  i ... i  $u_{k-m_R+1}$  jest  $(C_r)_{m_R}^j$  to

$$u_k^j = f_2^j \cdot u_{k-1} + \dots + f_{m_F}^j \cdot u_{k-m_F+1} + g_1^j \cdot e_k + \dots + g_{n_G}^j \cdot e_{k-n_G+1}, \quad (4.51)$$

gdzie  $e_k = y_k^{zad} - y_k$  – uchyb regulacji,  $f_2^j, \dots, f_{m_F}^j, g_1^j, \dots, g_{n_G}^j$  – współczynniki  $j$ -tego modelu lokalnego. Wyjście regulatora jest równe:

$$u_k = \sum_{j=1}^{l_U} \tilde{w}_j \cdot u_k^j. \quad (4.52)$$

W celu uproszczenia dalszych wzorów przyjęto, że

$$n = \max\{n_B, n_G + d\}, \quad (4.53)$$

$$m = \max\{m_C, m_F\}, \quad (4.54)$$

a brakujące współczynniki  $b_{n_B}^i$  (jeśli  $n_G + d > n_B$ ) i  $c_{m_C}^i$  (jeśli  $m_F > m_C$ ) w modelu obiektu oraz  $g_{n_G}^i$  (jeśli  $n_G + d < n_B$ ) i  $f_{m_F}^i$  (jeśli  $m_F < m_C$ ) w regulatorze są przyjmowane jako równe zero.

Założmy, dla uproszczenia rozważań, że punkt równowagi znajduje się w zerze;  $y^{zad} = 0$ . Założenie to nie wpływa jednak na ogólność przedstawionego rozumowania, ponieważ dla innej wartości zadanej, macierze stanu układu regulacji po przekształceniu będą takie same. Wprowadźmy następujący wektor quasi–stanu układu [17]:

$$\bar{x}_k = [y_k \quad \dots \quad y_{k-n+1} \quad u_{k-d-1} \quad \dots \quad u_{k-d-m+1}]^T. \quad (4.55)$$

Wówczas model obiektu regulacji przyjmie postać:

$$\begin{aligned} \bar{x}_{k+1} &= \sum_{i=1}^{l_Y} \tilde{w}_i \cdot A^i \cdot \bar{x}_k + \sum_{i=1}^{l_Y} \tilde{w}_i \cdot B^i \cdot u_{k-d}, \\ y_{k+1} &= \sum_{i=1}^{l_Y} \tilde{w}_i \cdot C^i \cdot \bar{x}_{k+1}, \end{aligned} \quad (4.56)$$

gdzie poszczególne macierze są następujące:

$$A^i = \begin{bmatrix} b_1^i & b_2^i & \dots & b_{n-1}^i & b_n^i & c_2^i & c_3^i & \dots & c_{m-1}^i & c_m^i \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B^i = \begin{bmatrix} c_1^i \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (4.57)$$

$$C^i = [1 \quad 0 \quad \dots \quad 0].$$

Natomiast wyjście regulatora w chwili  $k-d$  jest opisane następującym wzorem:

$$u_{k-d} = \sum_{j=1}^{l_U} \tilde{w}_j \cdot F^j \cdot \bar{x}_k + \sum_{j=1}^{l_U} \tilde{w}_j \cdot G^j \cdot y_k^{zad}, \quad (4.58)$$

gdzie  $G^j = [0 \quad \dots \quad 0 \quad g_1^j \quad \dots \quad g_{n-d}^j]$  oraz  $y_k^{zad} = [y_k^{zad} \quad \dots \quad y_{k-n+1}^{zad}]^T$ , a wektory  $F^j$  mają następującą postać:

$$F^j = [0 \quad \dots \quad 0 \quad -g_1^j \quad -g_2^j \quad \dots \quad -g_{n-d-1}^j \quad -g_{n-d}^j \quad f_2^j \quad f_3^j \quad \dots \quad f_{m-1}^j \quad f_m^j]. \quad (4.59)$$

Łatwo zauważyć, że w takim razie po połączeniu obydwu elementów układu regulacji, otrzymamy układ opisany wzorami:

$$\bar{x}_{k+1} = \sum_{i=1}^{l_Y} \tilde{w}_i \cdot \sum_{j=1}^{l_U} \tilde{w}_j \cdot (A^i + B^i \cdot F^j) \cdot \bar{x}_k + \sum_{i=1}^{l_Y} \tilde{w}_i \cdot \sum_{j=1}^{l_U} \tilde{w}_j \cdot B^i \cdot G^j \cdot y_k^{zad}, \quad (4.60)$$

$$y_{k+1} = C \cdot \bar{x}_{k+1},$$

gdzie  $C = [1 \quad 0 \quad \dots \quad 0]$ .

Równania układu zamkniętego przyjmą ostatecznie postać:

$$\bar{x}_{k+1} = A \cdot \bar{x}_k + B \cdot y_k^{zad}, \quad (4.61)$$

$$y_{k+1} = C \cdot \bar{x}_{k+1},$$

gdzie  $A = \sum_{i=1}^{l_Y} \tilde{w}_i \cdot \sum_{j=1}^{l_U} \tilde{w}_j \cdot A_{ij}$ ,  $B = \sum_{i=1}^{l_Y} \tilde{w}_i \cdot \sum_{j=1}^{l_U} \tilde{w}_j \cdot B^i \cdot G^j$ . Wprowadźmy następujące oznaczenia:

$$bg_{in}^{i,j} = \begin{cases} b_{in}^i; & in < d+1 \\ b_{in}^i - c_1^i \cdot g_{in}^j; & in \geq d+1 \end{cases}, \quad in = 1, \dots, n;$$

$$cf_{im}^{i,j} = c_{im}^i + c_1^i \cdot f_{im}^j, \quad im = 2, \dots, m.$$

Wówczas macierze  $A_{ij}$  mają postać daną wzorem:

$$A_{ij} = \begin{bmatrix} bg_1^{i,j} & bg_2^{i,j} & \dots & bg_d^{i,j} & bg_{d+1}^{i,j} & \dots & bg_{n-1}^{i,j} & bg_n^{i,j} & cf_2^{i,j} & cf_3^{i,j} & \dots & cf_{m-1}^{i,j} & cf_m^{i,j} \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -g_{d+1}^j & \dots & -g_{n-1}^j & -g_n^j & f_2^j & f_3^j & \dots & f_{m-1}^j & f_m^j \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.62)$$

Teraz zostanie przedstawiona druga metoda przekształcenia badanego układu regulacji do żądanej postaci, analogiczna do zaprezentowanej w [26].

Po podstawieniu (4.49) do (4.50) oraz wykorzystaniu (4.53) i (4.54), otrzymujemy:

$$y_{k+1} = \sum_{i=1}^{l_y} \tilde{w}_i \cdot \left( \sum_{in=1}^n b_{in}^i \cdot y_{k-in+1} + \sum_{im=1}^m c_{im}^i \cdot u_{k-d-im+1} \right), \quad (4.63)$$

analogicznie po podstawieniu (4.51) do (4.52), dostajemy:

$$u_{k-d} = \sum_{j=1}^{l_u} \tilde{w}_j \cdot \left( \sum_{io=2}^m f_{io}^j \cdot u_{k-d-io+1} + \sum_{ip=1}^{n-d} g_{ip}^j \cdot y_{k-d-ip+1}^{zad} - \sum_{ip=1}^{n-d} g_{ip}^j \cdot y_{k-d-ip+1} \right). \quad (4.64)$$

Ze wzorów (4.63) i (4.64) wynika:

$$y_{k+1} = \sum_{i=1}^{l_y} \tilde{w}_i \cdot \sum_{j=1}^{l_u} \tilde{w}_j \cdot \left( \sum_{in=1}^n b_{in}^i \cdot y_{k-in+1} + \sum_{im=2}^m c_{im}^i \cdot u_{k-d-im+1} \right) + \sum_{i=1}^{l_y} \tilde{w}_i \cdot \sum_{j=1}^{l_u} \tilde{w}_j \cdot \left( \sum_{io=2}^m c_{io}^i \cdot f_{io}^j \cdot u_{k-d-io+1} + \sum_{ip=1}^{n-d} c_{ip}^i \cdot g_{ip}^j \cdot (y_{k-d-ip+1}^{zad} - y_{k-d-ip+1}) \right), \quad (4.65)$$

a po zgrupowaniu wyrazów:

$$y_{k+1} = \sum_{i=1}^{l_y} \tilde{w}_i \cdot \sum_{j=1}^{l_u} \tilde{w}_j \cdot \left( \sum_{in=1}^n bg_{in}^{i,j} \cdot y_{k-in+1} + \sum_{im=2}^m cf_{im}^{i,j} \cdot u_{k-d-im+1} \right) + \sum_{i=1}^{l_y} \tilde{w}_i \cdot \sum_{j=1}^{l_u} \tilde{w}_j \cdot \sum_{ip=1}^{n-d} c_{ip}^i \cdot g_{ip}^j \cdot y_{k-d-ip+1}^{zad}, \quad (4.66)$$

gdzie  $bg_{in}^{i,j}$  i  $cf_{im}^{i,j}$  są takie same, jak we wzorze (4.62).

Zauważmy, że równość (4.64) można napisać jako:

$$u_{k-d} = \sum_{i=1}^{l_y} \tilde{w}_i \cdot \sum_{j=1}^{l_u} \tilde{w}_j \cdot \left( \sum_{io=2}^m f_{io}^j \cdot u_{k-d-io+1} + \sum_{ip=1}^{n-d} g_{ip}^j \cdot y_{k-d-ip+1}^{zad} - \sum_{ip=1}^{n-d} g_{ip}^j \cdot y_{k-d-ip+1} \right). \quad (4.67)$$

Po przyjęciu wektora quasi–stanu takiego, jak poprzednio (4.55) oraz rozpatrując układ autonomiczny, na podstawie (4.66) i (4.67) można napisać:

$$\bar{x}_{k+1} = \sum_{i=1}^{l_Y} \tilde{w}_i \cdot \sum_{j=1}^{l_U} \tilde{w}_j \cdot A_{ij} \cdot \bar{x}_k, \quad (4.68)$$

gdzie każda macierz  $A_{ij}$  jest określona wzorem (4.62), czyli takim, jak otrzymany pierwszą metodą, a liczba tych macierzy wynosi  $l_Y \cdot l_U$ .

Po zastosowaniu obydwu podejść, dostajemy te same wyniki, a do otrzymanego układu, można zastosować kryterium stabilności opisane w rozdz. 4.4.1. W takim razie w celu udowodnienia stabilności rozważanego układu wystarczy znaleźć taką dodatnio określoną macierz  $P$ , aby macierze  $A_{ij}^T \cdot P \cdot A_{ij} - P$  były ujemnie określone dla wszystkich  $i = 1, \dots, l_Y$ ,  $j = 1, \dots, l_U$ .

Zauważmy, że jeśli funkcje przynależności są takie same w regulatorze i w obiekcie, to ze względu na równości  $w_i \cdot w_j = w_j \cdot w_i$ , można zmniejszyć liczbę reguł opisujących układ zamknięty [101]. Macierz  $A$  ze wzoru (4.61) można wtedy przekształcić do postaci:

$$A = \sum_{i=1}^l \tilde{w}_i \cdot \tilde{w}_i \cdot A_{ii} + \sum_{i=1}^l \sum_{j=i+1}^l 2 \cdot \tilde{w}_i \cdot \tilde{w}_j \cdot A_{ij}^*, \quad (4.69)$$

gdzie  $A_{ij}^* = \frac{A_{ij} + A_{ji}}{2}$ .

Rozpatrzmy teraz sposób zastosowania opracowanych kryteriów w przypadku układu regulacji z regulatorem FDMC i obiektem opisanym modelem Takagi–Sugeno. Zakładamy, że obiekt z opóźnieniem jest opisany następującym modelem:

R<sub>0</sub><sup>i</sup>: jeśli  $y_k$  jest  $B_1^i$  i ... i  $y_{k-n_p+1}$  jest  $B_{n_p}^i$  i  $u_k$  jest  $C_1^i$  i ... i  $u_{k-m_p+1}$  jest  $C_{m_p}^i$  to

$$y_{k+1}^i = b_1^i \cdot y_k + \dots + b_n^i \cdot y_{k-n+1} + c_1^i \cdot u_{k-d} + \dots + c_m^i \cdot u_{k-d-m+1}. \quad (4.70)$$

Regulator FDMC jest natomiast złożony z wielu lokalnych regulatorów DMC w wersji analitycznej (rozdz. 3.2). W takim razie każda z reguł będzie następująca:

R<sub>r</sub><sup>j</sup>: jeśli  $y_k$  jest  $(B_r)_1^j$  i ... i  $y_{k-n_r+1}$  jest  $(B_r)_{n_r}^j$  i  $u_{k-1}$  jest  $(C_r)_2^j$  i ... i  $u_{k-m_r+1}$  jest  $(C_r)_{m_r}^j$  to

$$u_k^j = u_{k-1} + r_0^j \cdot e_k + r_1^j \cdot \Delta u_{k-1} + \dots + r_{p_d-1}^j \cdot \Delta u_{k-p_d+1}, \quad (4.71)$$

gdzie  $r_0^j, \dots, r_{p_d-1}^j$  – współczynniki regulatora,  $p_d$  – horyzont dynamiki,  $\Delta u_{k-1} = u_{k-1} - u_{k-2}$ .

W celu otrzymania postaci regulatora zależnej nie od przyrostów, lecz od wartości sterowania, wzór (4.71) został przekształcony do postaci:

$$u_k^j = r_0^j \cdot e_k + (1 + r_1^j) \cdot u_{k-1} + (r_2^j - r_1^j) \cdot u_{k-2} + \dots + (r_{p_d-1}^j - r_{p_d-2}^j) \cdot u_{k-p_d+1} - r_{p_d-1}^j \cdot u_{k-p_d}. \quad (4.72)$$

Przyjmijmy wektor quasi–stanu:

$$\bar{x}_k = \begin{bmatrix} y_k & \dots & y_{k-n+1} & u_{k-d-1} & \dots & u_{k-d-p_d} \end{bmatrix}^T, \quad (4.73)$$

przy czym założono, bez starty ogólności, że  $n \geq d+1$ .

W takim razie, przy założeniu, że  $m \leq p_d+1$ , odpowiednie współczynniki, których postać wynika z założonych modeli, są następujące:

$$g_{in}^j = \begin{cases} r_0^j; & in = 1 \\ 0; & in \neq 1 \end{cases}, f_{im}^j = \begin{cases} 1 + r_1^j; & im = 2 \\ r_{im-1}^j - r_{im-2}^j; & im > 2, im \leq p_d \\ -r_{p-1}^j; & im = p_d + 1 \end{cases},$$

$$bg_{in}^{i,j} = \begin{cases} b_{in}^i - c_1^i \cdot r_0^j; & in = d + 1 \\ b_{in}^i; & in \neq d + 1 \end{cases}, cf_{im}^{i,j} = \begin{cases} c_{im}^i + c_1^i \cdot f_{im}^j; & im \geq 2, im \leq m \\ c_1^i \cdot f_{im}^j; & im > m \end{cases},$$

$in = 1, \dots, n, im = 2, \dots, p_d+1$ . Ostateczna postać parametrów  $cf_{im}^{i,j}$  jest podana poniżej:

$$cf_{im}^{i,j} = \begin{cases} c_{im}^i + c_1^i \cdot (1 + r_1^j); & im = 2 \\ c_{im}^i + c_1^i \cdot (r_{im-1}^j - r_{im-2}^j); & im > 2, im \leq m \\ c_1^i \cdot (r_{im-1}^j - r_{im-2}^j); & im > m, im \leq p_d \\ -c_1^i \cdot r_{p_d-1}^j; & im = p_d + 1 \end{cases}.$$

W takim razie, rodzina macierzy  $A_{ij}$  otrzymana po wstawieniu powyższych współczynników do wzoru (4.62) ma postać:

$$A_{ij} = \begin{bmatrix} b_1^i & b_2^i & \dots & b_d^i & b_{d+1}^i - c_1^i \cdot r_0^j & \dots & b_{n-1}^i & b_n^i & c_2^i + c_1^i \cdot (1 + r_1^j) & c_3^i + c_1^i \cdot (r_2^j - r_1^j) & \dots \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -r_0^j & \dots & 0 & 0 & 1 + r_1^j & r_2^j - r_1^j & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & c_m^i + c_1^i \cdot (r_{m-1}^j - r_{m-2}^j) & \dots & c_1^i \cdot (r_m^j - r_{m-1}^j) & \dots & c_1^i \cdot (r_{p_d-1}^j - r_{p_d-2}^j) & -c_1^i \cdot r_{p_d-1}^j & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \ddots & \vdots & \dots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & r_{m-1}^j - r_{m-2}^j & \dots & r_m^j - r_{m-1}^j & \dots & r_{p_d-1}^j - r_{p_d-2}^j & -r_{p_d-1}^j & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \ddots & \vdots & \dots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}. \quad (4.74)$$

W powyższych rozważaniach założono, że  $m < p_d$ , ponieważ liczba składników zależnych od przeszłych wartości wyjść w modelu obiektu (4.70) nie powinna przekroczyć liczby elementów odpowiedzi skokowej użytych do modelowania, równej  $p_d$ . Przeciwny przypadek oznacza wybór zbyt krótkiego horyzontu predykcji, co może prowadzić do uzyskania złej jakości regulacji na skutek dużych błędów modelowania. Jednak w tym przypadku macierze  $A_{ij}$  mogą zostać otrzymane analogicznie, jak to zostało pokazane.

Poniżej zostaną przedstawione przykłady zastosowania opracowanej metody do badania stabilności przykładowych układów regulacji z regulatorami FDMC.

### Przykład 4.2.

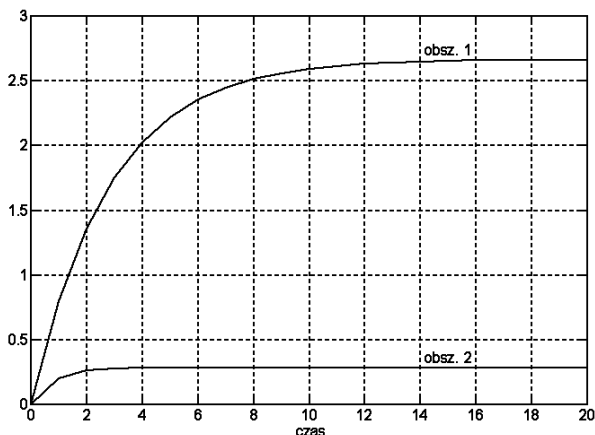
Niech obiekt regulacji będzie opisany następującym modelem:

$$\text{Reguła 1: jeśli } y_k \text{ jest } Y_1, \text{ to } y_{k+1}^1 = 0,7 \cdot y_k + 0,8 \cdot u_k, \quad (4.75)$$

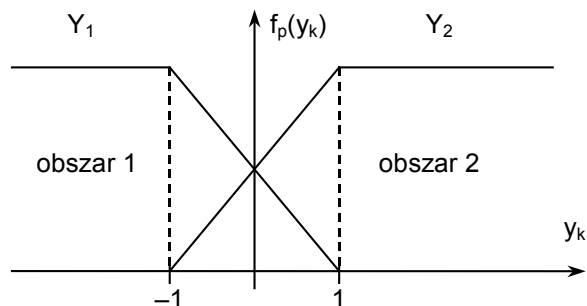
$$\text{Reguła 2: jeśli } y_k \text{ jest } Y_2, \text{ to } y_{k+1}^2 = 0,3 \cdot y_k + 0,2 \cdot u_k,$$

z funkcjami przynależności pokazanymi na rys. 4.2. Odpowiedzi skokowe modeli lokalnych zostały przedstawione na rys. 4.1.

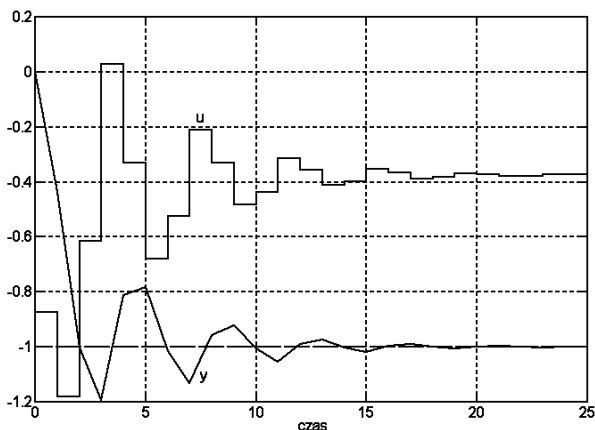
Do rozważanego obiektu spróbowano zaprojektować konwencjonalny regulator DMC, uzupełniony o filtr dyskretny z biegunem w 0,6 dodany na wejściu wartości zadanej. Nie otrzymano jednak zadowalających rezultatów. Jeśli regulator został zaprojektowany tak, aby działał dobrze w obszarze 1, to był zbyt wolny dla dodatnich wartości zadanych (rys. 4.4). Z kolei, jeśli został zaprojektowany do pracy w obszarze 2, to działał źle dla ujemnych wartości zadanych (rys. 4.3). Zadowolające działanie układu regulacji osiągnięto w wyniku zastosowania rozmytego regulatora DMC (rys. 4.5, 4.6). Parametr dostrajalny algorytmu DMC przyjęto w obu obszarach taki sam i równy  $\lambda = 0,1$ . Współczynniki obydwu regulatorów lokalnych zestawiono w tabl. 4.3.



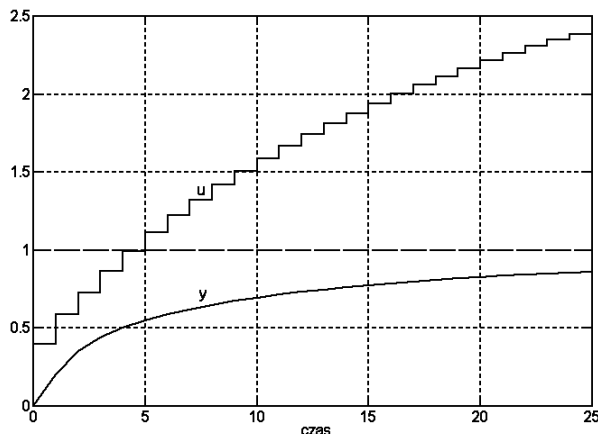
Rys. 4.1. Odpowiedzi skokowe modeli lokalnych



Rys. 4.2. Funkcje przynależności przykładowego modelu rozmytego

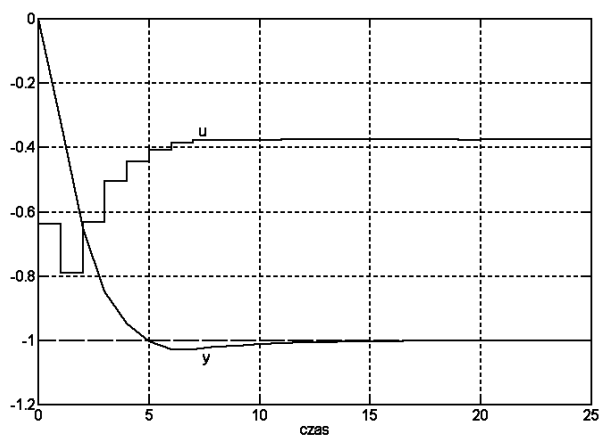


Rys. 4.3. Odpowiedź układu regulacji z regulatorem DMC dobranym dla obszaru 2; skok wartości zadanej z  $y_0 = 0$  do  $y_{zad} = -1$

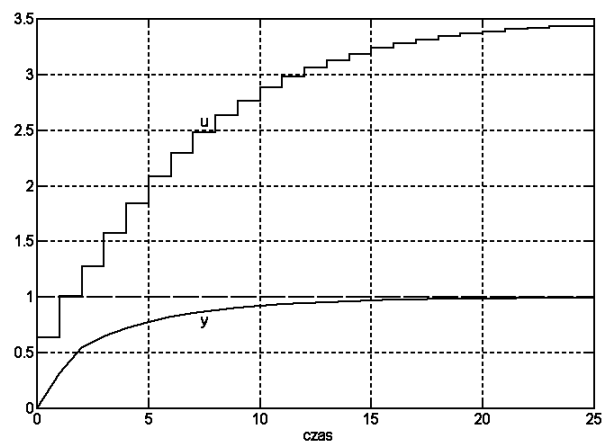


Rys. 4.4. Odpowiedź układu regulacji z regulatorem DMC dobranym dla obszaru 1; skok wartości zadanej z  $y_0 = 0$  do  $y_{zad} = 1$





Rys. 4.5. Odpowiedź układu regulacji z rozmytym regulatorem DMC; skok wartości zadanej z  $y_0 = 0$  do  $y_{zad} = -1$



Rys. 4.6. Odpowiedź układu regulacji z rozmytym regulatorem DMC; skok wartości zadanej z  $y_0 = 0$  do  $y_{zad} = 1$

Tabl. 4.3. Współczynniki regulatorów lokalnych z przykładu 4.2

$i$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	
$r_i^1$	0.9999	-0.6300	-0.4410	-0.3087	-0.2161	-0.1512	-0.1060	-0.0741	-0.0519	
$r_i^2$	2.1857	-0.1567	-0.0470	-0.0141	-0.0042	-0.0013	-0.0004	0	0	
$i$	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
$r_i^1$	-0.0362	-0.0254	-0.0179	-0.0124	-0.0088	-0.0061	-0.0043	-0.0030	-0.0021	-0.0013
$r_i^2$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Funkcje przynależności przyjęto takie same w modelu obiektu i w regulatorze. W związku z tym, układ regulacji jest złożony z trzech reguł. Po podstawieniu współczynników regulatora do wzoru (4.74), otrzymano więc trzy macierze  $A_{ij}$  z poszczególnych obszarów układu zamkniętego. Dla tych macierzy, za pomocą toolbox'a LMI z pakietu *Matlab*, znaleziono macierz  $P$  spełniającą warunki kryterium stabilności. W takim razie badany układ regulacji jest globalnie asymptotycznie stabilny. Otrzymane macierze nie zostały w pracy zamieszczone ze względu na ich rozmiar oraz to, że można je wyznaczyć w prosty sposób, na podstawie zamieszczonych danych i przedstawionej procedury (ta sama uwaga dotyczy także macierzy z następnego przykładu).

W celu sprawdzenia, jak dalece konserwatywne jest użyte kryterium, przeprowadzono następujący eksperyment. Zmieniano wzmocnienie obiektu regulacji (dodano szeregowe wzmocnienie  $k_a$  i zwiększano je co 0,001), przy nie zmienionym regulatorze. Po każdej zmianie wzmocnienia  $k_a$ , sprawdzano stabilność odstrojonego układu regulacji. Macierz  $P$  została znaleziona dla  $k_a \leq 2,372$ . Jeden z układów lokalnych stał się niestabilny dla  $k_a = 2,395$ . W takim razie dla  $2,372 < k_a < 2,395$  kryterium nie rozstrzyga o stabilności badanego układu regulacji, co jest mało konserwatywnym wynikiem zważywszy, że użyte kryterium dostarcza jedynie warunku dostatecznego stabilności.

### Przykład 4.3.

Obiektem regulacji jest kolumna etylenowa z układami regulacji, której model został zaprezentowany w przykładzie 3.1. Przypomnijmy, że model ten w klasycznej postaci TS, otrzymany dla okresu próbkowania  $T_p = 40$  min jest następujący:

Reguła 1: jeśli  $u_{k-2}$  jest  $U_1$ , to  $y_{k+1}^1 = 0,7659 \cdot y_k - 520,2638 \cdot u_{k-2} + 2220,9067$ , (4.76)

Reguła 2: jeśli  $u_{k-2}$  jest  $U_2$ , to  $y_{k+1}^2 = 0,7659 \cdot y_k - 253,5771 \cdot u_{k-2} + 1102,4471$ ,

Reguła 3: jeśli  $u_{k-2}$  jest  $U_3$ , to  $y_{k+1}^3 = 0,7659 \cdot y_k - 125,1030 \cdot u_{k-2} + 563,8767$ ,

z funkcjami przynależności takimi, jak na rys. 3.4 z rozdz. 3.1.

Do rozważanego obiektu, na podstawie odpowiedzi skokowych uzyskanych dla poszczególnych modeli lokalnych (rys. 3.8), został dobrany regulator FDMC. Otrzymane dla  $\lambda = 8e+6$  parametry regulatorów lokalnych zostały zamieszczone w tabl. 4.4. Kształt funkcji przynależności regulatora przyjęto taki sam, jak w modelu obiektu, ale założono, że są one zależne od  $u_{k-1}$ . Ze względu na przyjęcie różnych funkcji przynależności w regulatorze i w obiekcie, otrzymany układ zamknięty jest złożony z dziewięciu reguł. Teraz zostanie zbadana stabilność tego układu regulacji. Parametry dla wektora quasi-stanu (4.73) są w tym przypadku następujące:  $d = 2$ ,  $n = 3$ ,  $p_d = 22$ .

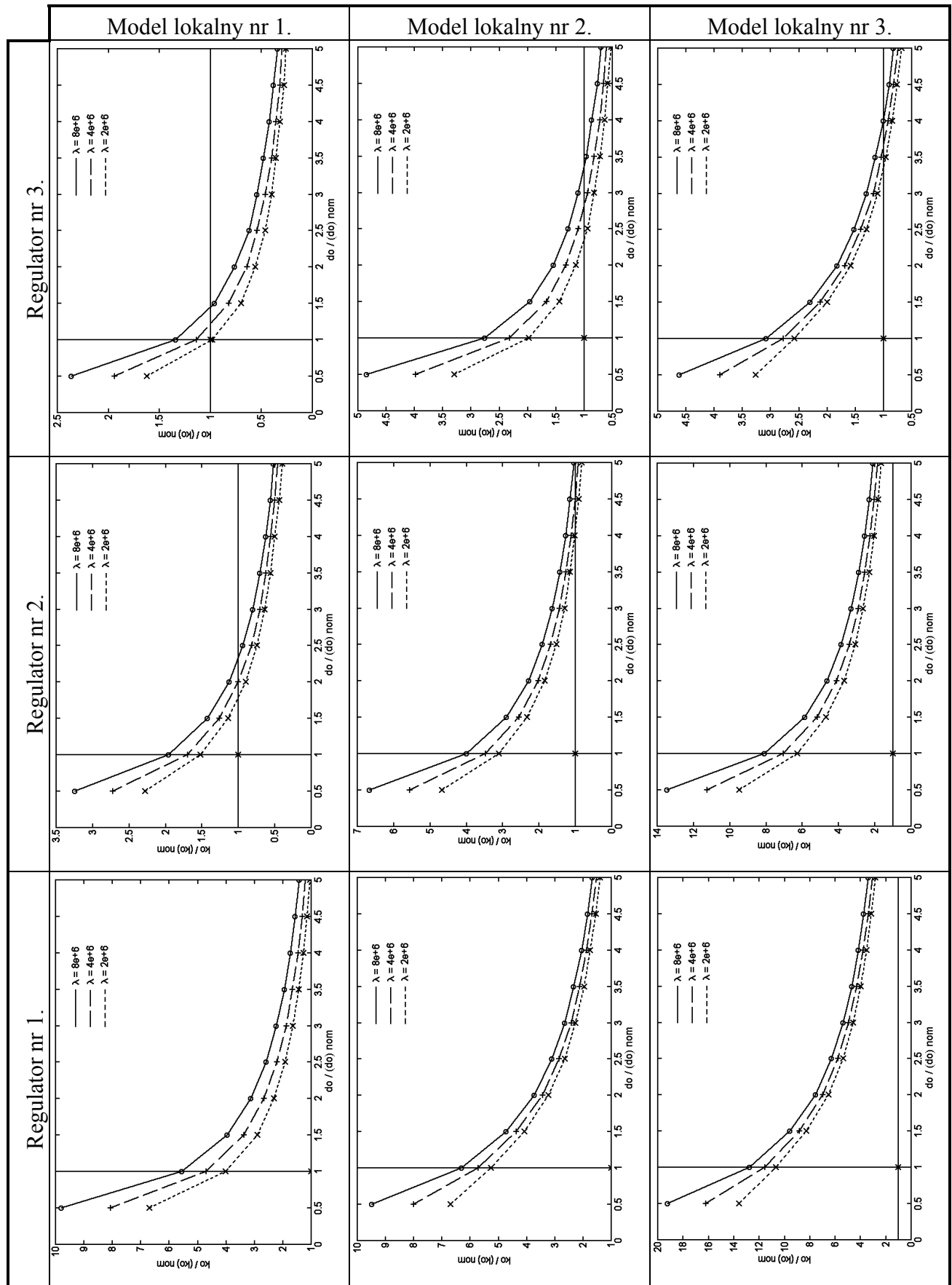
Po wstawieniu parametrów regulatora do wzoru (4.74), otrzymano dziewięć macierzy  $A_{ij}$ . Następnie dla tych macierzy  $A_{ij}$  znaleziono, za pomocą LMI toolbox'a z pakietu *Matlab*, dodatnio określoną macierz  $P$  spełniającą warunki kryterium stabilności. W takim razie badany układ regulacji jest globalnie asymptotycznie stabilny.

Tabl. 4.4. Współczynniki regulatorów lokalnych z przykładu 4.3

$i$	0	1	2	3	4	5	6	7
$r_i^1$	-2,8433e-4	-4,2023e-1	-4,6978e-1	-3,5985e-1	-2,7565e-1	-2,1118e-1	-1,6177e-1	-1,2395e-1
$r_i^2$	-3,1038e-4	-2,5392e-1	-2,7318e-1	-2,0925e-1	-1,6027e-1	-1,2277e-1	-9,4050e-2	-7,2028e-2
$r_i^3$	-3,3222e-4	-1,4922e-1	-1,5584e-1	-1,1935e-1	-9,1400e-2	-6,9983e-2	-5,3572e-2	-4,0995e-2
$i$	8	9	10	11	12	13	14	15
$r_i^1$	-9,4981e-2	-7,2766e-2	-5,5775e-2	-4,2722e-2	-3,2728e-2	-2,5062e-2	-1,9138e-2	-1,4515e-2
$r_i^2$	-5,5177e-2	-4,2250e-2	-3,2345e-2	-2,4721e-2	-1,8878e-2	-1,4382e-2	-1,0901e-2	-8,1776e-3
$r_i^3$	-3,1355e-2	-2,3962e-2	-1,8291e-2	-1,3937e-2	-1,0590e-2	-8,0130e-3	-6,0241e-3	-4,4845e-3
$i$	16	17	18	19	20	21		
$r_i^1$	-1,0921e-2	-8,0255e-3	-5,6905e-3	-3,7532e-3	-2,1609e-3	-9,3829e-4		
$r_i^2$	-6,0656e-3	-4,4131e-3	-3,0647e-3	-1,9865e-3	-1,1484e-3	-4,9661e-4		
$r_i^3$	-3,2882e-3	-2,3549e-3	-1,6242e-3	-1,0514e-3	-6,0451e-4	-2,6219e-4		

W celu sprawdzenia, jak bardzo konserwatywny jest otrzymany wynik, przeprowadzono taki sam eksperyment, jak w przykładzie 4.2, tzn. zmieniano wzmocnienie obiektu, a regulator zastosowano taki sam, jak poprzednio. Macierz  $P$  znaleziono dla  $k_a \leq 1,020$ . Jeden z lokalnych układów stał się niestabilny dla  $k_a = 1,336$ . W przypadku  $1,020 < k_a < 1,336$  użyte kryterium nie orzeka na temat stabilności badanego układu regulacji.

Przeprowadzono także drugi eksperyment, polegający na wyznaczeniu obszarów stabilności układów regulacji złożonych z poszczególnych lokalnych modeli obiektu i z poszczególnych regulatorów lokalnych. Zostały one przedstawione na rys. 4.7. Przypomnijmy jednak, że stabilność wszystkich takich układów jest jedynie warunkiem koniecznym istnienia macierzy  $P$  (dowodzi tego kolejny eksperyment, którego wyniki zostały omówione nieco dalej, przeprowadzony tym razem dla dwukrotnie mniejszej wartości parametru dostrajalnego  $\lambda$ ).



Rys. 4.7. Obszary stabilności poszczególnych układów

Na przedstawionych rysunkach, powyżej każdej krzywej znajduje się obszar zmian parametrów w lokalnym modelu obiektu, dla którego dany układ jest niestabilny, zaś poniżej – obszar, w którym układ jest stabilny. Każdą krzywą otrzymano odstrajając parametr obiektu  $d_o$  – czas opóźnienia i zmieniając parametr  $k_o$  – wzmocnienie obiektu aż do uzyskania niestabilnego zachowania badanego układu. Na rys. 4.7 wartości zmienianych parametrów są podane w odniesieniu do nominalnych wartości parametrów  $(d_o)_{nom}$  i  $(k_o)_{nom}$  odpowiedniego lokalnego modelu obiektu. Ponieważ funkcje przynależności dla modelu obiektu i dla regulatora były różne, zbadano dziewięć układów (stąd dziewięć obszarów na rys. 4.7). Spośród otrzymanych układów, najbliższej granicy stabilności, dla parametrów nominalnych (oznaczonych na rysunkach przecięciem linii ciągłych), znajduje się układ powstały z połączenia lokalnego modelu obiektu nr 1 z regulatorem nr 3 (dobranym do lokalnego modelu obiektu nr 3).

Sprawdzono także, jak zmiana parametru  $\lambda$  wpływa na stabilność układu regulacji. Przy zmniejszaniu wartości parametru  $\lambda$ , obszary stabilności układów będących połączeniem modeli lokalnych z lokalnymi regulatorami zmniejszają się, zgodnie z oczekiwaniem. Dla  $\lambda = 4e+6$  (dwukrotnie mniejszego niż pierwotnie przyjęty) i wartości nominalnych  $(d_o)_{nom}$  i  $(k_o)_{nom}$ , wszystkie układy są stabilne, lecz po zastosowaniu procedury rozwiązywania układu LMI do badanego układu, nie znaleziono macierzy  $P$ . W takim razie kryterium nie rozstrzyga w tym przypadku kwestii stabilności badanego układu regulacji. Warto zwrócić uwagę na to, że dla parametrów nominalnych, układ powstały po połączeniu modelu lokalnego nr 1 z regulatorem nr 3, znajduje się bardzo blisko granicy stabilności. Po założeniu czterokrotnie mniejszej wartości parametru  $\lambda = 2e+6$ , właśnie ten układ jest niestabilny. Oznacza to, że macierz  $P$  dla badanego układu regulacji nie istnieje.

W niniejszym rozdziale przedstawiono sposób analizy stabilności nieliniowych układów regulacji z rozmytymi regulatorami predykcyjnymi bez uwzględniania ograniczeń, bazujących na modelach procesu typu wejście–wyjście. Analiza polega na zastosowaniu kryterium Tanaki i Sugeno po odpowiednim przekształceniu modelu opisującego układ regulacji. Warto zauważyć, że sformułowanie metody analizy jest ogólne i może ona zostać użyta to badania innych układów regulacji o podobnej strukturze, np. z innego rodzaju rozmytymi algorytmami predykcyjnymi. Ponadto ze względu na przekształcenie badanego układu regulacji do standardowej postaci, można także skorzystać z modyfikacji kryterium Tanaki i Sugeno [100] lub innych kryteriów stabilności [12].

#### 4.5. Układy regulacji z rozmytymi algorytmami predykcyjnymi w wersji numerycznej

W niniejszym rozdziale, algorytm FDMC w wersji numerycznej zostanie sformułowany w taki sposób, aby układy regulacji z tym algorytmem były stabilne. Aby ten cel osiągnąć, należy połączyć kilka elementów, z podejść omówionych wcześniej w rozdz. 4. Pierwszym z tych elementów jest suboptymalny algorytm dualny [97], przy czym jako regulatora stabilizującego można użyć bądź regulatora liniowego jak w [74], bądź algorytmu FDMC w wersji analitycznej, którego sposób badania stabilności został zaprezentowany w rozdz. 4.4. Ponadto wprowadzane jest ograniczenie stabilizujące nałożone na wartość sterowania, co czyni algorytm podobnym do algorytmu z nieskończonym horyzontem oraz do algorytmu z ograniczeniem równościowym nałożonym na stan końcowy (rozdz. 4.3). Zaprezentowane podejście może zostać użyte w przypadku wszystkich odmian algorytmu FDMC, niezależnie od używanej metody predykcji i niezależnie od sposobu wyznaczania sterowania (rozwiązywanie zadania optymalizacji lub równania algebraicznego w każdym kroku algorytmu). Dalej przyjęto założenie, że obiekt regulacji jest stabilny, co jest naturalnym założeniem zważywszy na sposób opisu modelu w algorytmach FDMC.

W rozważanym przypadku, ze względu na postać regulatora działającego lokalnie, przyjęto wektor quasi–stanu zdefiniowany analogicznie, jak w rozdz. 4.4 (por. wzór (4.55)), ale tak, żeby jego elementy były równe zeru w punkcie równowagi, czyli:

$$\bar{\mathbf{x}}_k = \left[ y_k - y^{zad} \quad \dots \quad y_{k-n+1} - y^{zad} \quad u_{k-d-1} - u_s \quad \dots \quad u_{k-d-p_d} - u_s \right]^T. \quad (4.77)$$

Rozpatrzmy następujące zadanie optymalizacji nieliniowej:

$$\min_{\mathbf{u}} \phi = \sum_{j=0}^{p-1} \theta(\bar{\mathbf{x}}_{k+j|k}) \cdot \left( \bar{\mathbf{x}}_{k+j|k}^T \mathbf{Q} \bar{\mathbf{x}}_{k+j|k} + R \cdot (u_{k+j|k} - u_s)^2 \right), \quad (4.78)$$

przy ograniczeniach:

$$y_{k+1} = f(y_k, u_k), \quad (4.78a)$$

$$\bar{\mathbf{x}}_{k+p} \in W, \quad (4.78b)$$

$$\Delta u_{\min} \leq \Delta u_{k+j|k} \leq \Delta u_{\max}, \quad (4.78c)$$

$$u_{\min} \leq u_{k+j|k} \leq u_{\max}, \quad (4.78d)$$

$$y_{\min} \leq y_{k+j|k} \leq y_{\max}, \quad (4.78e)$$

gdzie  $\theta(\bar{\mathbf{x}}_{k+j|k}) = \begin{cases} 0; & \bar{\mathbf{x}}_{k+j|k} \in W \\ 1; & \bar{\mathbf{x}}_{k+j|k} \notin W \end{cases}$  oraz założono, że obiekt nieliniowy jest opisany modelem

rozmytym typu Takagi–Sugeno; zależność (4.78a). Przyjęto także, że model jest dokładny, tzn. nie ma błędów modelowania. Zauważmy, że wskaźnik jakości zależy od przyjętego wektora quasi–stanu.

Sterowania będą wyznaczone przy użyciu algorytmów opisanych w rozdz. 3, wykorzystujących w każdym kroku przybliżony model obiektu, otrzymany przy użyciu wnioskowania rozmytego. Algorytmy te polegają na rozwiązywaniu zadania optymalizacji:

$$\min_{\Delta \mathbf{u}} J = \sum_{i=0}^{p-1} (y^{zad} - y_{k+i|k})^2 + \lambda \cdot \sum_{i=0}^{s-1} (\Delta u_{k+i|k})^2, \quad (4.79)$$

przy ograniczeniach:

$$y_{k+p|k} = y^{zad}, \quad (4.79a)$$

$$\Delta u_{\min} \leq \Delta u_{k+i|k} \leq \Delta u_{\max}, \quad (4.79b)$$

$$u_{\min} \leq u_{k+i|k} \leq u_{\max}, \quad (4.79c)$$

$$y_{\min} \leq y_{k+i|k} \leq y_{\max}, \quad (4.79d)$$

gdzie  $y_{k+i|k}$  jest przewidywaną wartością wyjścia obiektu regulacji otrzymywaną w różny sposób, w zależności od wykorzystywanego algorytmu FDMC (rozd. 3.3).

Drugim ważnym elementem sformułowania jest ograniczenie (4.79a). Jest ono odpowiednikiem ograniczenia wymuszającego zerowanie stanu. Wprowadzenie tych ograniczeń do algorytmów suboptymalnych ma na celu zapewnienie malenia funkcji celu liczonej na pod-

stawie modelu nieliniowego, czyli spełnienia warunku (4.29). Niestety, w celu uwzględnienia tego ograniczenia trzeba skorzystać z modelu nieliniowego, co byłoby równoznaczne z rezygnacją z głównej zalety proponowanych algorytmów. Zamiast ograniczenia (4.79a) można użyć, analogicznie jak w przypadku konwencjonalnego algorytmu DMC (rozdz. 4.3), ograniczenia nałożonego na sterowania, a nie na wartość wyjścia modelu nieliniowego, które powinno być łatwiejsze do spełnienia:

$$u_s = u_{k-1} + \sum_{i=0}^{s-1} (\Delta u_{k+i|k})^2, \quad (4.80)$$

gdzie,  $u_s$  jest wartością sterowania odpowiadającą wartości zadanej wyjścia obiektu regulacji  $y^{zad}$  na charakterystyce statycznej modelu obiektu. W przypadku modelu opartego na odpowiedziach skokowych, przyjęcie tego ograniczenia wymusza zerowanie stanu w chwili  $p_d+s-1$ .

Dalsze rozważania zostaną poprzedzone pewnymi spostrzeżeniami. W predykcyjnych algorytmach dualnych z przełączeniem na regulator stabilizujący ze sprzężeniem od stanu, podstawowym problemem jest wyznaczenie takiego zbioru  $W$ , że stan obiektu poddanego działaniu regulatora stabilizującego nie opuszcza tego zbioru, układ regulacji jest wewnątrz tego zbioru stabilny i zbiór ten znajduje się wewnątrz obszaru dopuszczalnego. Warunki te zapewniają spełnienie ograniczeń i stabilność układu regulacji z omawianym algorytmem, jeśli tylko stan procesu znajdzie się wewnątrz zbioru  $W$ .

Najczęściej w podejściach tego typu, jako regulator stabilizujący, jest wykorzystywany liniowy regulator ze sprzężeniem od stanu. Przy okazji omawiania algorytmu z pracy [97] zamieszczono szkic dowodu stabilności (zob. rozdz. 4.2.4). Zauważmy, że z dowodu tego wynika możliwość zastosowania jako regulatora działającego w otoczeniu punktu równowagi, dowolnego regulatora zapewniającego stabilność wewnątrz zbioru  $W$ , także regulatora nieliniowego, jeśli zachodzi taka potrzeba.

W dalszej części rozważań wykorzystano ten fakt zakładając, że jest już dostępny regulator FDMC, dla którego układ regulacji bez ograniczeń jest stabilny globalnie (w rozdz. 4.4 przedstawiono sposób badania stabilności układów regulacji z tego typu regulatorami). Oznaczmy ten regulator przez  $u = h_{FDMC}(\bar{x})$ . Teraz trzeba jeszcze wyznaczyć zbiór  $W$ . Regulator FDMC, o którym mowa, jest złożony z liniowych regulatorów lokalnych. Fakt ten zostanie wykorzystany do znalezienia zbioru  $W$ . W przypadku doboru regulatora liniowego, poniższy sposób upraszcza się, ze względu na mniejszą liczbę problemów optymalizacji do rozwiązania.

W [74] zaproponowano następującą metodę. Niech  $X$  oznacza zbiór dopuszczalny dla wektora stanu  $\bar{x}_k$ , zaś  $U$  dla wektora sterowań  $u_k$ . Niech  $d(\bar{x}_k, X)$  oznacza odległość  $\bar{x}_k$  od zbioru ograniczeń, zaś  $d(u_k, U)$  – odległość  $u_k$  od zbioru ograniczeń. Wówczas wystarczy tylko znaleźć takie  $\alpha$  (np. rozwiązując zadanie optymalizacji), aby:

$$\max_{\bar{x}_k} (d(\bar{x}_k, X)) = 0, \quad (4.81)$$

przy ograniczeniu

$$\bar{x}_k^T P \bar{x}_k \leq \alpha \quad (4.81a)$$

oraz

$$\max_{\bar{x}_k} (d(K^i \bar{x}_k, U)) = 0, \quad i = 1, \dots, l, \quad (4.82)$$

przy ograniczeniu

$$\bar{x}_k^T P \bar{x}_k \leq \alpha, \quad (4.82a)$$

gdzie  $\mathbf{P}$  – macierz Lapunowa układu z regulatorem z rozdz. 4.4,  $\alpha > 0$ ,  $\mathbf{K}^i$  – wektor współczynników regulatora lokalnego nr  $i$ ,  $i = 1, \dots, l$ ,  $l$  – liczba regulatorów lokalnych w regulato-rze FDMC. Znalezienie  $\alpha$  spełniającego powyższe warunki jest równoznaczne ze znalezieniem zbioru  $W$ . Metoda powyższa jest dobra pod warunkiem dysponowania odpowiednim algorytmem rozwiązywania powyższych zadań optymalizacji, co w ogólności może nie być łatwym warunkiem do spełnienia.

W związku z powyższym, opracowano innego rodzaju metodę, w której wystarczy rozwiązać szereg problemów programowania kwadratowego z liniowym ograniczeniem równościowym, co jest zadaniem prostszym niż poprzednie i możliwym do wykonania przy użyciu standardowych i powszechnie dostępnych procedur optymalizacji. Metoda wykorzystuje fakt, że ograniczenia (4.79b–d) są liniowe i polega na spostrzeżeniu, że wystarczy sprawdzić, czy dane ograniczenie (definiujące hiperpłaszczyznę) ma punkty wspólne z hiperelipsoidą określoną ograniczeniem (4.81a) przy założonej wartości parametru  $\alpha$ . Jeśli tak, to wartość tego parametru jest zmniejszana i ponownie są sprawdzane stosowne warunki. Jeśli nie, to znaleziono szukaną wartość parametru  $\alpha$ . Szczegółowo rozpisany algorytm jest następujący:

1. Wybieramy wartość parametru  $\alpha$ ;
2. Rozwiązujemy kolejno  $n+p_d$  ( $n+p_d$  – długość wektora quasi–stanu) zadań programowania kwadratowego:

$$\min_{\bar{\mathbf{x}}_k} (\bar{\mathbf{x}}_k^T \mathbf{P} \bar{\mathbf{x}}_k), \quad (4.83)$$

przy ograniczeniu:

$$\mathbf{A}^j \bar{\mathbf{x}}_k = \mathbf{A}^j \mathbf{x}_k^{ogrd}, \quad (4.83a)$$

gdzie  $\mathbf{A}^j = [0 \ \dots \ 0 \ 1 \ 0 \ \dots \ 0]$  jest wektorem o liczbie elementów takiej samej, jak w wektorze stanu, z 1 na  $j$ -tym miejscu,  $\mathbf{x}_k^{ogrd}$  – wektor ograniczeń dolnych dla wektora stanu; oraz  $n+p_d$  zadań:

$$\min_{\bar{\mathbf{x}}_k} (\bar{\mathbf{x}}_k^T \mathbf{P} \bar{\mathbf{x}}_k), \quad (4.84)$$

przy ograniczeniu:

$$\mathbf{A}^j \bar{\mathbf{x}}_k = \mathbf{A}^j \mathbf{x}_k^{ogrg}, \quad (4.84a)$$

gdzie  $\mathbf{x}_k^{ogrg}$  – wektor ograniczeń górnych dla wektora stanu. Następnie (w przypadku jednowymiarowym) rozwiązujemy  $l$  zadań:

$$\min_{\bar{\mathbf{x}}_k} (\bar{\mathbf{x}}_k^T \mathbf{P} \bar{\mathbf{x}}_k), \quad (4.85)$$

przy ograniczeniu:

$$\mathbf{K}^i \bar{\mathbf{x}}_k = u_k^{ogrd}, \quad (4.85a)$$

gdzie  $u_k^{ogrd}$  – ograniczenie dolne nałożone na sterowanie; oraz  $l$  zadań:

$$\min_{\bar{\mathbf{x}}_k} (\bar{\mathbf{x}}_k^T \mathbf{P} \bar{\mathbf{x}}_k), \quad (4.86)$$

przy ograniczeniu:

$$\mathbf{K}^i \bar{\mathbf{x}}_k = u_k^{ogrg}, \quad (4.86a)$$

gdzie  $u_k^{ogrg}$  – ograniczenie górne nałożone na sterowanie.

Po rozwiązaniu każdego z wyżej wymienionych zadań sprawdzamy, czy wyznaczone minimum spełnia warunek  $\hat{\mathbf{x}}_k^T \mathbf{P} \hat{\mathbf{x}}_k < \alpha$  ( $\hat{\mathbf{x}}_k^T$  – wektor otrzymany w wyniku rozwiązania zadania optymalizacji). Jeśli tak, to oznacza to, że zbiory ograniczeń mają punkty wspólne. W takim razie zmniejszamy wartość  $\alpha$  i ponownie rozwiązujemy zadanie, na którym się zatrzymaliśmy. Jeśli warunek nie zostanie spełniony, to przechodzimy do kolejnego z zestawu zadań itd.

Zauważmy, że algorytm ten korzysta z efektywnych, dobrze już znanych metod obliczeniowych i szybko prowadzi do otrzymania rozwiązania, co miało miejsce np. w dalej zaprezentowanym przykładzie. Dlatego warto go stosować nawet wtedy, gdy dysponujemy metodą optymalizacji, której można użyć w przypadku poprzednio przedstawionego algorytmu znajdowania zbioru  $W$ .

Zauważmy także, że zadania optymalizacji (4.83 – 4.86) mają rozwiązania analityczne i mogą zostać rozwiązane analogicznie, jak problem znajdowania sterowania w analitycznej wersji algorytmu DMC (zob. rozdz. 2).

Stosując zaproponowany algorytm i sukcesywnie zmniejszając  $\alpha$ , zostanie znaleziony zbiór  $W$ . Ponieważ założono, że punkt równowagi należy do zbioru dopuszczalnego, to szukana wartość  $\alpha$  istnieje. Gdy zbiór  $W$  zostanie już znaleziony, można zastosować poniższy algorytm:

1. Niech  $\mu \in (0,1]$ .
2. W chwili  $k = 0$ , stan  $\bar{\mathbf{x}}_0$  jest znany. Jeśli  $\bar{\mathbf{x}}_0 \in W$ , to  $u_0 = h_{FDMC}(\bar{\mathbf{x}}_0)$ . W przeciwnym przypadku, na podstawie stanu  $\bar{\mathbf{x}}_0$  jest wyznaczana, w wyniku rozwiązania zadania optymalizacji (4.79) z ograniczeniem stabilizującym (4.80), sekwencja przyszłych przyrostów sterowania  $\Delta \boldsymbol{\pi}_0 = \{\Delta u_{0|0}, \Delta u_{1|0}, \dots, \Delta u_{s-1|0}\}$  i odpowiadająca jej sekwencja stanu  $\{\bar{\mathbf{x}}_0, \bar{\mathbf{x}}_{1|0}, \dots, \bar{\mathbf{x}}_{p|0}\}$  spełniająca założone w zadaniu optymalizacji (4.78) ograniczenia. Następnie do sterowania jest wykorzystywane  $\Delta u_0 = \Delta u_{0|0}$ .
3. W chwili  $k$ , jeśli  $\bar{\mathbf{x}}_k \in W$ , to  $u_k = h_{FDMC}(\bar{\mathbf{x}}_k)$ . W przeciwnym przypadku jest rozwiązywane zadanie optymalizacji (4.79) i wyznaczana kolejna sekwencja przyrostów sterowania  $\Delta \boldsymbol{\pi}_k = \{\Delta u_{k|k}, \Delta u_{k+1|k}, \dots, \Delta u_{k+s-1|k}\}$  i odpowiadająca jej sekwencja stanu  $\{\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_{k+1|k}, \dots, \mathbf{x}_{k+p|k}\}$ , spełniająca założone w zadaniu optymalizacji ograniczenia. Ponadto jest sprawdzane, czy zachodzi nierówność:

$$\phi_k(\bar{\mathbf{x}}_k, \boldsymbol{\pi}_k) \leq \phi_{k-1}(\bar{\mathbf{x}}_{k-1}, \boldsymbol{\pi}_{k-1}) - \mu \cdot (\bar{\mathbf{x}}_{k-1}^T \mathbf{Q} \bar{\mathbf{x}}_{k-1} + R \cdot (u_{k-1} - u_s)^2). \quad (4.87)$$

Jeśli tak, to do sterowania używane jest  $\Delta u_k = \Delta u_{k|k}$ , jeśli nie, to używany jest kolejny przyrost sterowania z poprzednio wyznaczonej sekwencji, tzn.  $\Delta u_k = \Delta u_{k|k-1}$ . Jako sekwencji startowej dla problemu optymalizacji (4.79) można użyć sekwencji  $\boldsymbol{\pi} = \{u_{k|k-1}, u_{k+1|k-1}, \dots, u_{k+p-2|k-1}, u_s\}$  (będzie to sekwencja dopuszczalna).

Zauważmy, że w problemie (4.79) przyjęto ograniczenie stabilizujące (4.80), czyli inne niż bezpośrednie wymaganie dojścia stanu procesu do zbioru  $W$ . Ponieważ założono, że obiekt regulacji jest stabilny, to jeśli ograniczenie (4.80) będzie spełnione na końcu horyzontu sterowania, to stan układu dąży asymptotycznie do punktu równowagi, a to z kolei oznacza, że dojdzie także do zbioru  $W$ .

Ze względu na sposób działania ograniczenia stabilizującego (4.80), przy sprawdzaniu zależności (4.87) należy liczyć wartość wskaźnika jakości analogicznie, jak przy nieskończo-



nym horyzoncie, czyli w rozpatrywanym przypadku, aż do dojścia wektora quasi–stanu do zbioru  $W$ ; wynika to z postaci przyjętego wskaźnika jakości (4.78).

Stabilność układu regulacji z powyższym algorytmem jest zapewniona dzięki stabilności regulatora działającego w otoczeniu punktu równowagi oraz wymuszeniu malenia funkcji celu ograniczeniem (4.87), co implikuje dojście quasi–stanu procesu w skończonym czasie do zbioru  $W$ , co zostało udowodnione w pracy [97], a idea dowodu przedstawiona w rozdz. 4.2.4.

Zauważmy, że jako regulatora działającego w otoczeniu punktu równowagi, można też użyć odpowiednio zaprojektowanego regulatora DMC. Podejście to, podobnie, jak użycie innego rodzaju regulatorów liniowych, wydaje się być jednak bardziej konserwatywne od podejścia przedstawionego wyżej, w którym skorzystano z nieliniowego regulatora.

Jeśli otoczenie  $W$  punktu równowagi jest niewielkie, to zaprojektowanie regulatora nieliniowego, stabilizującego obiekt w tym otoczeniu jest prostsze, ponieważ w grę wchodzi mniej obszarów (mniej obszarów może być aktywnych). Ponadto, może okazać się wystarczające znalezienie liniowego regulatora stabilizującego.

Algorytmy FDMC wykorzystujące przedstawiony mechanizm będą oznaczane przez dodanie litery S do ich nazwy. Możliwe jest więc zaprojektowanie algorytmów FDMC–SLS, FDMC–SLRNS, FDMC–MLRNS. Przykład użycia tych algorytmów został opisany poniżej.

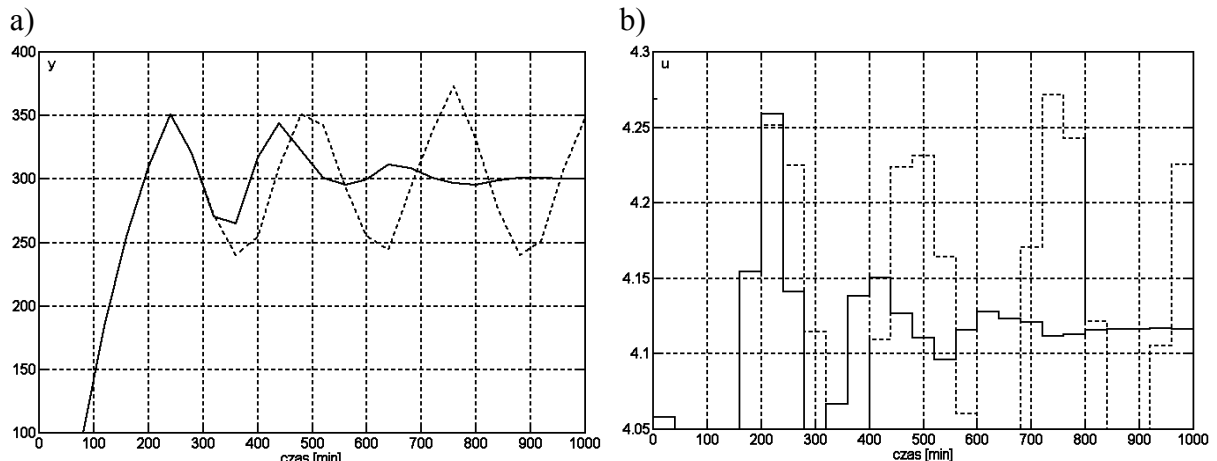
#### Przykład 4.4.

Otrzymany algorytm został przetestowany w układzie regulacji kolumny etylenowej, której model rozmyty został przedstawiony w przykładzie 4.3 łącznie z regulatorem FDMC w wersji analitycznej. Wektor quasi–stanu ma w tym przypadku postać; por. (4.77):

$$\bar{x}_k = [y_k - y^{zad} \quad \dots \quad y_{k-2} - y^{zad} \quad u_{k-3} - u_s \quad \dots \quad u_{k-24} - u_s]^T. \quad (4.88)$$

Jako macierz  $P$  ze wzoru (4.83) przyjęto macierz Lapunowa znalezioną w przykładzie 4.3.

W celu sprawdzenia skuteczności działania wprowadzonego mechanizmu stabilizującego, przeprowadzono następujący eksperyment. Do badanego obiektu regulacji zaprojektowano algorytm FDMC–SLRN bez mechanizmu stabilizującego, przy czym przyjęto taką wartość parametru  $\lambda = 4e+5$ , aby uzyskać niestabilną odpowiedź układu (linia przerywana na rys. 4.8).

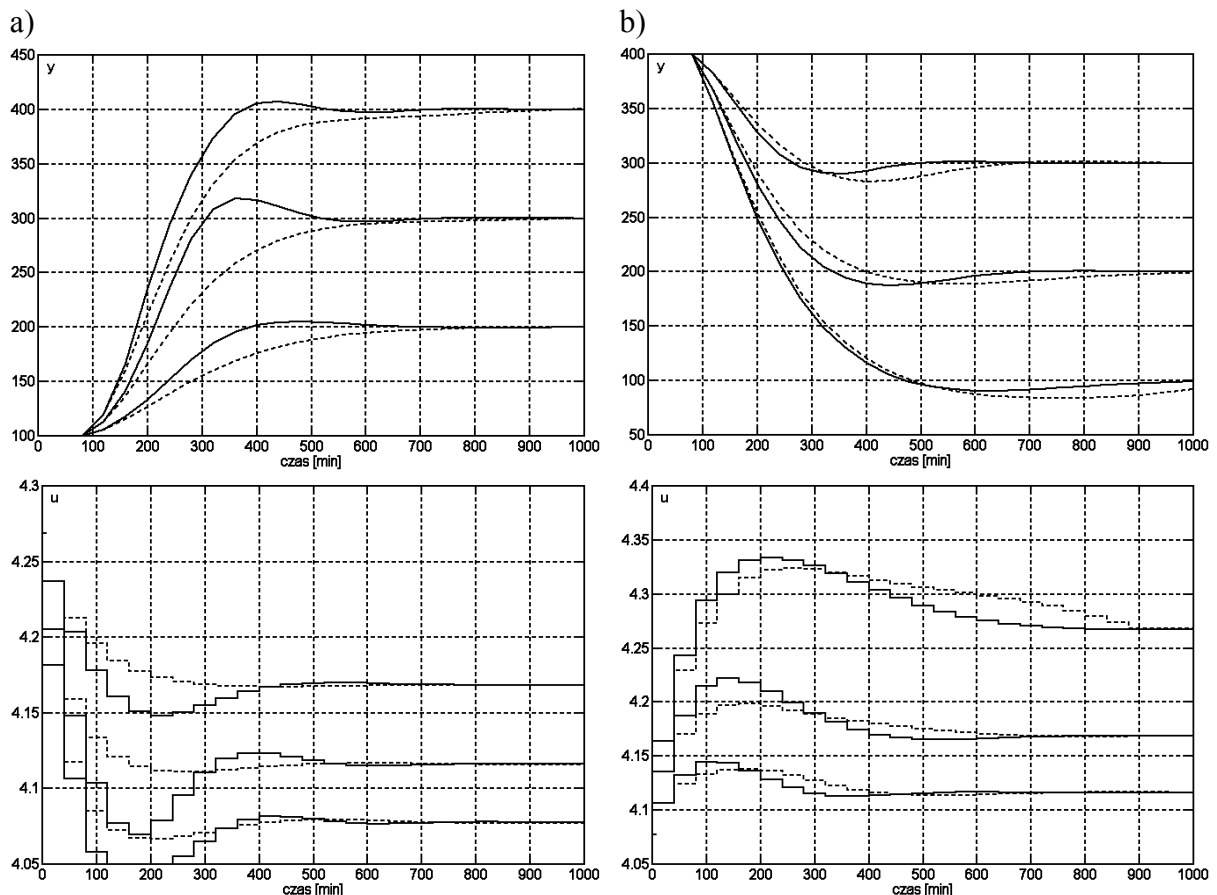


Rys. 4.8. Odpowiedzi układów regulacji z regulatorem FDMC–SLRN z mechanizmem stabilizującym (linia ciągła) i bez tego mechanizmu (linia przerywana) na skok wartości zadanej z  $y_0 = 100$  ppm do  $y_0 = 300$  ppm; a) przebiegi wyjścia, b) przebiegi sterowania; wnioskowanie zależne od  $u_{k-1}$

Następnie zastosowano algorytm dualny FDMC–SLRN z ograniczeniem stabilizującym (4.80). Jako regulatora stabilizującego użyto regulatora FDMC w wersji analitycznej, przedstawionego w przykładzie 4.3. Ponadto, przyjęto następujące parametry algorytmu:  $\mu = 1e-10$ ,  $R = \lambda = 4e+5$  i  $\mathbf{Q} = \mathbf{I}$ . Odpowiedzi otrzymane w układzie regulacji z regulatorem FDMC–SLRNS zostały oznaczone na rys. 4.8 linią ciągłą.

Otrzymany wynik dobrze ilustruje skuteczność zaproponowanych modyfikacji wprowadzonych do algorytmów FDMC i zapewniających stabilność układów regulacji te algorytmy wykorzystujących. Duże przeregulowanie występujące w otrzymanych przebiegach jest spowodowane wartością parametru  $\lambda$  przyjętą w celu zaprezentowania właściwości stabilizujących oraz skuteczności zaproponowanego rozwiązania. Jeśli jednak regulator jest projektowany tak, aby spełniać typowe kryteria, należy założyć inną wartość parametru dostrajalnego. Tak też uczyniono podczas kolejnego eksperymentu.

Na rys. 4.9 pokazano przykładowe przebiegi uzyskane podczas symulacji zaprojektowanego układu regulacji przy czym linią ciągłą oznaczono przebiegi otrzymane z regulatorem FDMC–SLRNS, zaś linią przerywaną – te otrzymane z regulatorem FDMC–SLS; w obydwu przypadkach przyjęto wnioskowanie w zależności od  $u_{k-1}$ . Wartość parametru  $\alpha$  znajdowano za pomocą zaproponowanego wyżej algorytmu. Natomiast wartości pozostałych parametrów dostrajalnych założono następujące:  $\mu = 1e-10$ ,  $R = \lambda = 8e+6$  i  $\mathbf{Q} = \mathbf{I}$ . W każdym kroku algorytmu sprawdzano, czy wskaźnik jakości z zadania (4.78) dostatecznie szybko maleje (nierówność (4.87)). Podkreślny, że czyniono to na wskaźniku innym niż użyty przy wyznaczeniu sterowań (zostało to ujęte w opisie algorytmu).



Rys. 4.9. Odpowiedzi układów regulacji z regulatorami FDMC–SLS (linia przerywana) i FDMC–SLRNS (linia ciągła) na skoki wartości zadanej z a)  $y_0 = 100$  ppm, b)  $y_0 = 400$  ppm; powyżej przebiegi wyjścia, poniżej przebiegi sterowania wnioskowanie zależne od  $u_{k-1}$

W każdym kroku działania regulatora FDMC–SLS używano najprostszej z metod predykcji, a mimo to tylko w przypadku skoków wartości zadanej z 400 ppm, musiał on korzystać z wyników optymalizacji z poprzedniej chwili w celu zapewnienia malenia funkcji celu, co wpłynęło na zmniejszenie przeregulowania. W pozostałych przypadkach, odpowiedzi praktycznie nie uległy zmianie w stosunku do tych, uzyskanych z regulatorem FDMC–SL (bez mechanizmów zapewniających stabilność). Odpowiedzi uzyskane w układzie regulacji z regulatorem FDMC–SLRN bez mechanizmów zapewniających stabilność są natomiast niemal identyczne, jak w przypadku zastosowania algorytmu FDMC–SLRNS. Odpowiedzi układu regulacji z regulatorem FDMC–MLRNS były bardzo zbliżone do odpowiedzi uzyskanych z regulatorem FDMC–SLRNS i dlatego nie zostały tutaj zamieszczone. Opracowany mechanizm zapewniania stabilności układów regulacji z proponowanymi regulatorami jest więc efektywny i nie wpływa negatywnie na jakość regulacji.

Warto poświęcić parę słów komentarza na temat parametrów występujących w wersjach algorytmów zapewniających stabilność. Jeśli chodzi o parametr  $\alpha$ , to uwagi na jego temat oraz sposób jego znajdowania zostały wcześniej przedstawione. Należy jedynie zauważyć, że w przypadku każdej zmiany wartości zadanej, należy ten parametr wyznaczać od nowa. Nie jest to jednak zbyt uciążliwe w przypadku zastosowania zaproponowanego w pracy algorytmu, który jest szybki i efektywny.

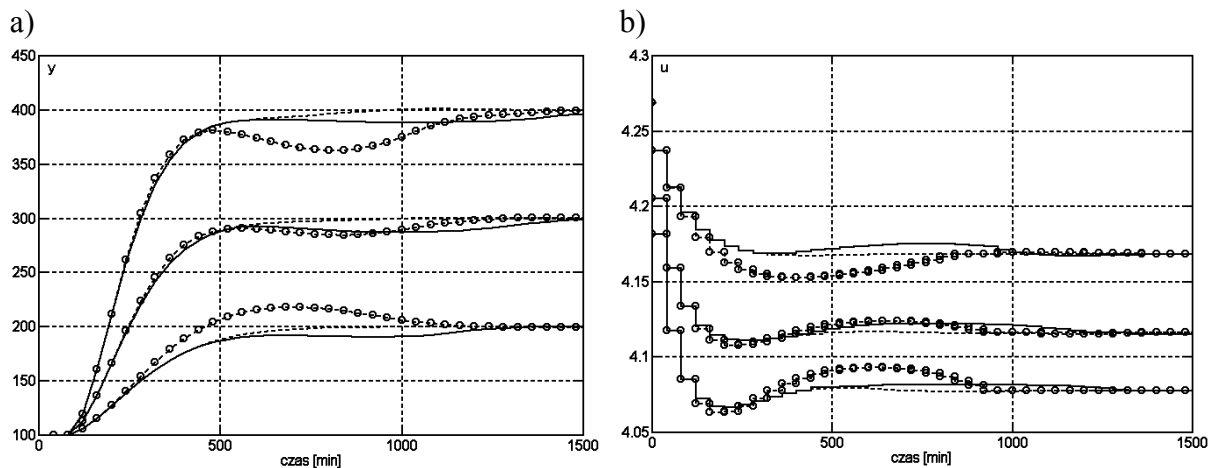
Drugi z parametrów występuje w sprawdzanej w każdej iteracji algorytmu nierówności (4.87), wymuszającej dążenie stanu procesu do zbioru  $W$ . W przykładzie przyjęto taką wartość parametru  $\mu$ , aby algorytm FDMC–SLRNS w żadnej iteracji nie korzystał ze sterowań wyznaczonych w poprzedniej chwili. Zauważmy, że znalezienie odpowiedniej wartości parametru  $\mu$  nie musi być trudne. W razie potrzeby można bowiem ten parametr zmniejszać w kolejnych iteracjach, bez utraty stabilności, aż do uprzednio założonego ograniczenia dolnego. Jest tak, ponieważ jeśli nierówność (4.87) jest spełniona dla danej wartości parametru  $\mu$ , to tym bardziej będzie spełniona dla mniejszej jego wartości.

Zauważmy, że im mniejsza jest wartość parametru  $\mu$ , tym rzadziej algorytm powinien korzystać ze sterowań wyznaczonych wcześniej. W związku z tym, jeśli zależy nam na tym, aby tak było, należy przyjąć jak najmniejszą jego wartość. Interesująca jest jednak kwestia, jak można oszacować odpowiednią wartość parametru  $\mu$ . Otóż, podczas symulacji działania układu regulacji wystarczy skorzystać z odpowiednio przekształconej nierówności (4.87), a dokładnie z wynikającego z niej oszacowania wartości szukanego parametru:

$$\mu \leq \frac{\phi_{k-1}(\bar{\mathbf{x}}_{k-1}, \boldsymbol{\pi}_{k-1}) - \phi_k(\bar{\mathbf{x}}_k, \boldsymbol{\pi}_k)}{\bar{\mathbf{x}}_{k-1}^T \mathbf{Q} \bar{\mathbf{x}}_{k-1} + R \cdot (u_{k-1} - u_s)^2}. \quad (4.89)$$

Następnie, zgodnie z uwagą zawartą w poprzednim akapicie, w trakcie symulacji można parametr  $\mu$  zmniejszać. Trzeba jednak pamiętać o przyjętym w algorytmie założeniu, że  $\mu \in (0,1]$ . W takim razie, jeśli różnica  $\phi_{k-1}(\bar{\mathbf{x}}_{k-1}, \boldsymbol{\pi}_{k-1}) - \phi_k(\bar{\mathbf{x}}_k, \boldsymbol{\pi}_k) \leq 0$ , jesteśmy zmuszeni do użycia sterowań wyznaczonych w poprzedniej chwili próbkowania.

Warto zwrócić także uwagę na wpływ, jaki może wywrzeć wartość parametru  $\mu$  na działanie układu regulacji. Jak już wspomniano, przy większych wartościach parametru, możemy być zmuszeni częściej korzystać ze sterowań wyznaczonych w poprzednich krokach. Może to mieć negatywny wpływ na działanie układu regulacji szczególnie, jeśli trzeba przez kilka kroków pod rząd używać poprzednio wyznaczonych sterowań. Sterowania te były bowiem wyznaczane w przeszłości, na podstawie otrzymanego dla wartości wyjść z ówczesnej chwili, przybliżenia nieliniowego modelu obiektu. Przybliżenie to może więc już być nieaktualne, a w takim razie, jakość przebiegów otrzymanych po zastosowaniu sterowań z przeszłości może być daleka od oczekiwanej.



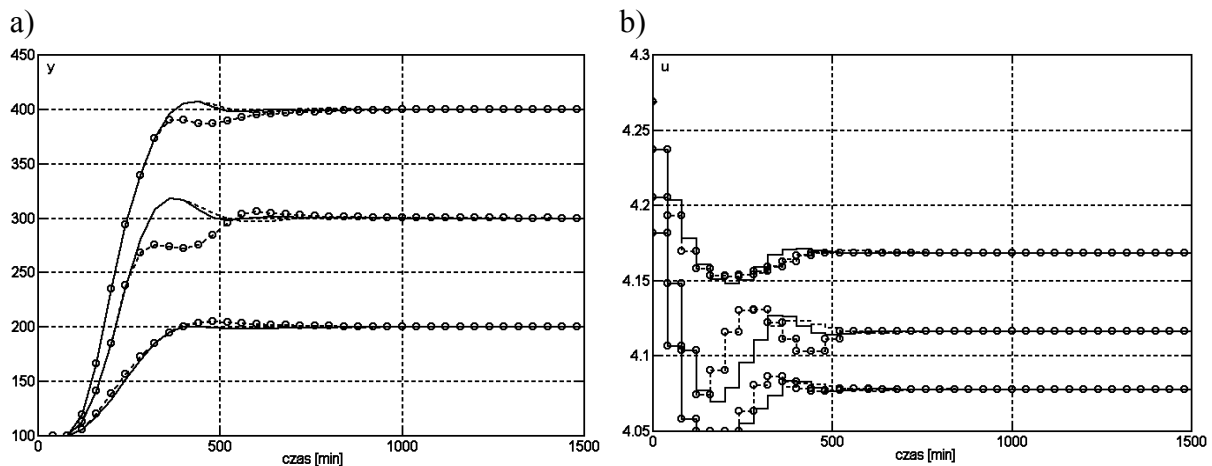
Rys. 4.10. Odpowiedzi układu regulacji z regulatorem FDMC–SLS na skoki wartości zadanej z  $y_0 = 100$  ppm; a) przebiegi wyjścia, b) przebiegi sterowania; dalsze objaśnienia w tekście

Wpływ parametru  $\mu$  na działanie przykładowego układu regulacji z regulatorem FDMC–SLS ilustruje rys. 4.10. Linia przerywaną oznaczono przebieg, otrzymany dla wartości  $\mu = 1e-10$  (czyli takiej, jaką przyjęto pierwotnie w przykładzie), linią ciągłą dla  $\mu = 1e-4$ , zaś okręgami dla  $\mu = 1e-3$ . Dla  $\mu = 1e-10$ , regulator ani razu nie korzystał ze sterowań z poprzedniej iteracji.

W miarę zmniejszania wartości parametru  $\mu$ , regulator coraz wcześniej zaczynał korzystać ze sterowań wyznaczonych w przeszłości i rosła liczba chwil, w których z nich korzystał. Nie miało to jednak widocznego wpływu na kształt odpowiedzi aż do  $\mu = 1e-6$  włącznie, chociaż dla  $y_{zad} = 400$  ppm poprzednie sterowania były wykorzystywane od 800 do 1080 minuty, dla  $y_{zad} = 300$  ppm – od 720 do 1000 minuty, a dla  $y_{zad} = 200$  ppm – od 680 do 920 minuty (podczas analizy przebiegów wyjścia, należy pamiętać o opóźnieniu występującym w obiekcie równym 80 min). Zwróćmy jednak uwagę na to, że gdy regulator zaczynał wykorzystywać poprzednio obliczone sterowania, wyjście obiektu znajdowało się już blisko wartości zadanej i następnie niewiele się już zmieniało, więc błędy modelowania nie były znaczne.

Widoczne, choć niewielkie różnice przebiegów otrzymano dla  $\mu = 1e-5$ , ponieważ wcześniej następował moment, gdy regulator wykorzystywał poprzednio wyznaczone sterowania. Znaczne różnice pojawiły się dopiero dla  $\mu = 1e-4$  (przebiegi oznaczone linią ciągłą). W tym przypadku regulator korzystał z poprzednich sterowań: dla  $y_{zad} = 400$  ppm – od 480 do 1600 minuty, dla  $y_{zad} = 300$  ppm – od 440 do 1320 minuty, a dla  $y_{zad} = 200$  ppm – od 360 do 960 minuty. Tym razem, przez parę pierwszych iteracji takiej pracy, sterowania generowane przez regulator oraz wartości wyjścia różniły się niewiele od otrzymanych dla  $\mu = 1e-10$ . Jednak w miarę oddalania się od momentu rozpoczęcia korzystania z poprzednich sterowań, różnice zaczynały rosnać.

Podobny efekt, jednak znacznie lepiej dostrzegalny można zaobserwować dla przypadku, gdy  $\mu = 1e-3$ . Wówczas regulator wykorzystywał poprzednie sterowania: dla  $y_{zad} = 400$  ppm – od 160 do 1600 minuty, dla  $y_{zad} = 300$  ppm – od 160 do 1080 minuty, a dla  $y_{zad} = 200$  ppm – od 80 do 960 minuty. Zauważmy, że w tej sytuacji otrzymane przebiegi uległy znacznej zmianie, szczególnie dla wartości zadanej  $y_{zad} = 400$  ppm. Dla wartości  $\mu = 1e-2$  i mniejszych, regulator tylko na początku działania wyznaczał sterowania, a efekt ich dalszego używania bez aktualizacji, był praktycznie nie do zaakceptowania ze względu na znaczne przeregulowania.



Rys. 4.11. Odpowiedzi układu regulacji z regulatorem FDMC–SLRNS na skoki wartości zadanej z  $y_0 = 100$  ppm; a) przebiegi wyjścia, b) przebiegi sterowania; dalsze objaśnienia w tekście

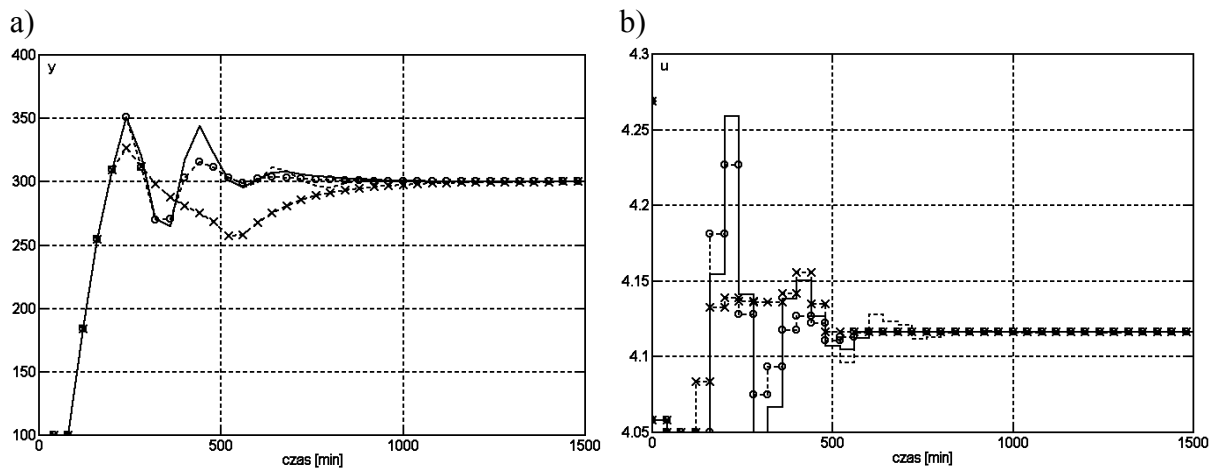
Podobny eksperyment wykonano w układzie regulacji z algorytmem FDMC–SLRNS. Tak samo, jak w poprzednim przypadku, na rys. 4.11 linią przerywaną oznaczono przebieg, otrzymany dla  $\mu = 1e-10$ , linią ciągłą dla  $\mu = 1e-4$ , zaś okręgami dla  $\mu = 1e-3$ . Przypomnijmy, że dla  $\mu = 1e-10$ , regulator ani razu nie korzystał ze sterowań z poprzedniej iteracji.

Tak samo, jak w przypadku układu z regulatorem FDMC–SLS, w miarę zmniejszania wartości parametru  $\mu$ , regulator coraz wcześniej i w coraz większej liczbie kroków korzystał ze sterowań wyznaczonych w przeszłości. Jednak tym razem nawet dla  $\mu = 1e-4$  (linia ciągła), otrzymane przebiegi są bardzo zbliżone do tych uzyskanych dla  $\mu = 1e-10$  pomimo tego, że w przypadku skoku do  $y_{zad} = 200$  ppm, regulator wykorzystywał poprzednio wygenerowane sterowania od 320 do 960 minuty, dla  $y_{zad} = 300$  ppm – od 360 do 1200 minuty oraz dla  $y_{zad} = 400$  ppm – od 400 do 1280 minuty.

Znaczne różnice otrzymanych przebiegów pojawiły się dla  $\mu = 1e-3$  (linia przerywana z okręgami). Wtedy regulator wykorzystywał poprzednie sterowania: dla  $y_{zad} = 200$  ppm – od 80 do 960 minuty, dla  $y_{zad} = 300$  ppm – od 120 do 1200 minuty, a dla  $y_{zad} = 400$  ppm – od 280 do 1240 minuty. Dla wartości  $\mu = 1e-2$  regulator tylko w pierwszym kroku działania wyznaczył sterowania, a następnie wykorzystywał je w dalszych krokach bez aktualizacji. Takie działanie wpłynęło negatywnie na jakość regulacji szczególnie przy skoku wartości zadanej do  $y_{zad} = 300$  ppm, gdy pojawiło się znaczne przeregulowanie (przeszło 50 %).

Sprawdzono także, jak na działanie układu regulacji z algorytmem FDMC–SLRNS z przykładu ilustrującego skuteczność mechanizmu stabilizującego (dla  $\lambda = 4e+5$ ), wpływają zmiany parametru  $\mu$ . Otrzymane odpowiedzi pokazano na rys. 4.12. Linią przerywaną oznaczono przebieg otrzymany dla wartości  $\mu = 1e-10$  (czyli takiej, jaką przyjęto pierwotnie w przykładzie), linią ciągłą dla  $\mu = 1e-4$ , okręgami dla  $\mu = 1e-3$  i dla  $\mu = 1e-2$ , a iksami dla  $\mu = 1e-1$ .

W badanym przypadku, przebiegi otrzymane poczynając od  $\mu = 1e-10$  aż do  $\mu = 1e-4$ , różniły się niewiele. Jednak dla  $\mu = 1e-10$  regulator korzystał z uprzednio wyznaczonych sterowań od 240 do 1280 minuty z wyjątkiem sterowań wyznaczonych w 520, 720, 960, 1000, 1040 i 1240 minucie. Dla  $\mu = 1e-4$ , pojawiły się pewne różnice w odpowiedziach ponieważ algorytm używał poprzednich sterowań od 240 do 1360 minuty, bez przerwy.



Rys. 4.12. Odpowiedzi układu regulacji z regulatorem FDMC–SLRNS na skok wartości zadanej z  $y_0 = 100$  ppm do  $y_0 = 300$  ppm; a) przebiegi wyjścia, b) przebiegi sterowania; dalsze objaśnienia w tekście

Większe różnice pojawiły się dla  $\mu = 1e-3$  oraz  $\mu = 1e-2$ . Dla tych wartości parametrów otrzymano takie same odpowiedzi, ponieważ w obydwu przypadkach algorytm korzystał z wyznaczonych wcześniej sterowań, począwszy od 200 do 1280 minuty. W przypadku, gdy  $\mu = 1e-1$ , działanie regulatora było dalece niezadowolające, ponieważ począwszy od 120 (do 1320) minuty, regulator korzystał z poprzednich sterowań, otrzymanych w początkowej fazie działania.

Korzystając z przedstawionego mechanizmu zapewniania stabilności można więc dobrać wartość parametru  $\mu$  w sposób opisany powyżej, przy czym zakres wartości, który nie ma znacznego wpływu na jakość regulacji jest stosunkowo duży.

## 5. Uwzględnianie ograniczeń nałożonych na wyjścia obiektu regulacji w konwencjonalnych i rozmytych algorytmach DMC

Dużą zaletą algorytmów predykcyjnych jest możliwość uwzględniania w nich różnego rodzaju ograniczeń. Przy czym metoda uwzględniania ograniczeń nałożonych na sygnały sterujące jest właściwe oczywista i wynika ze sposobu formułowania algorytmów predykcyjnych. Trudniejsze jest natomiast uwzględnianie ograniczeń wyjść obiektu regulacji szczególnie, jeśli trzeba uwzględnić istniejącą niepewność modelowania. Niniejszy rozdział dotyczy właśnie tego zagadnienia, w odniesieniu do rozmytych algorytmów predykcyjnych.

Uwzględnianie ograniczeń w przypadku, gdy predykcji dokonuje się używając modelu nieliniowego i w każdym kroku działania regulatora jest rozwiązywane zadanie optymalizacji nieliniowej, jest prostsze i sprowadza się praktycznie do przekazania tych ograniczeń (w ogólności nieliniowych) do procedury optymalizującej. Trudność polega w tym przypadku na znalezieniu rozwiązania zadania optymalizacji.

W sytuacji badanej w niniejszej pracy, istotnym problemem, jest natomiast konieczność wprowadzania ograniczeń liniowych względem wyznaczanych sterowań, aby w celu obliczenia sterowań wystarczyło rozwiązać zadanie programowania liniowo–kwadratowego, co jest podstawową zaletą rozmytych algorytmów predykcyjnych.

Opracowano sposoby uwzględniania w regulatorach FDMC ograniczeń nałożonych na wyjścia obiektu regulacji (także na wyjścia nieregulowane) w warunkach niepewności. Rozpatrywano przy tym dwa przypadki: niepewność modelowaną jako znane, z dokładnością do zbioru, zakłócenie dodane do wyjścia modelu obiektu regulacji oraz niepewność wynikającą z niedokładnej znajomości parametrów modelu obiektu regulacji.

Idea proponowanych metod korzysta z podejścia polegającego na rozpatrywaniu najgorszego przypadku. W pierwszym kroku wyprowadzane są wzory na minimalną i maksymalną możliwą (przy założonej niepewności) wartość wyjścia obiektu regulacji w przyszłej chwili. Później, otrzymane zależności służą do sformułowania nierówności opisujących ograniczenia nałożone na wyjścia obiektu regulacji. Nierówności te są następnie przekształcane do ograniczeń nałożonych na wartości sterowań lub przyrostów sterowań.

W dalszej kolejności, jeśli projektowany jest regulator FDMC oparty na sformułowaniu analitycznym, to stosuje się metodę rzutowania sterowań na zbiór ograniczeń. Proponowane podejście może zostać również zastosowane w algorytmach FDMC w wersji numerycznej. W tym przypadku, otrzymane w wyniku przekształceń ograniczenia wystarczy przekazać do procedury optymalizacyjnej.

Warto także wspomnieć o innym rodzaju podejściu do rozważanego zagadnienia. Interesujące rozwiązanie problemu, polegające na manipulowaniu trajektorią wartości zadanej, zostało przedstawione w [9]. W podejściu tym regulator predykcyjny służy do generowania takich wartości zadanych, aby w układzie regulacji, na którego wejście są one podawane, przyjęte ograniczenia były spełnione, natomiast problemy stabilizacji obiektu regulacji, nadążania za zmianami wartości zadanej oraz kompensacji zakłóceń są domeną uprzednio zaprojektowanego regulatora. Takie wykorzystanie regulacji predykcyjnej dla obiektów liniowych zostało opisane w [6], zaś dla obiektów nieliniowych w [4].

Przedstawione w niniejszym rozdziale rozważania rozpoczyna omówienie uwzględniania ograniczeń nałożonych na wyjścia modelu obiektu regulacji w konwencjonalnych regulatorach DMC. Omówienie to ma charakter wprowadzenia do zagadnienia, ponieważ na przedstawionych rozwiązaniach bazuje sposób uwzględniania ograniczeń wyjść modelu obiektu w regulatorach FDMC. W dalszej części rozdziału skoncentrowano się na sposobach postępowania w przypadku uwzględnienia w algorytmach FDMC ograniczeń wyjść obiektu regulacji w warunkach niepewności modelowania. Opracowano metody dla algorytmów zarówno w

wersji analitycznej, jak i numerycznej. Metody te mogą zostać wykorzystane także w przypadku regulatorów konwencjonalnych. Wówczas można zastosować wyprowadzone dla przypadku rozmytego wzory, przy założeniu, że jest aktywny tylko jeden model lokalny.

Zaproponowane mechanizmy są stosunkowo proste i łatwe do zastosowania, a przy tym przynoszą zadowalające efekty. Ponadto mogą zostać użyte w przypadku innych regulatorów predykcyjnych wykorzystujących modele rozmyte.

## 5.1. Sterowanie przy ograniczeniach nałożonych na wyjścia modelu obiektu regulacji

Rozważania rozpoczyna, mające charakter wstępu, omówienie mechanizmów opracowanych dla konwencjonalnych algorytmów DMC. Dalej zostały przedstawione metody przeznaczone dla algorytmów FDMC, zarówno w wersji analitycznej, jak i numerycznej. Przedstawione w niniejszym rozdziale rozważania są etapem pośrednim na drodze zmierzającej do opracowania metod uwzględniania w regulatorach FDMC, ograniczeń wyjść obiektu regulacji w warunkach niepewności modelowania.

### 5.1.1. Algorytmy DMC

#### Analityczna wersja algorytmu DMC

Algorytm regulacji DMC w wersji analitycznej można w stosunkowo łatwy sposób wzbogacić o możliwość uwzględniania w nim ograniczeń nałożonych na wyjścia modelu obiektu. Wymaga to dokonania odpowiednich przekształceń, które zostały opisane poniżej. Ze względu na to, że podstawową zaletą zaprezentowanego w rozdz. 2.2 regulatora w wersji analitycznej jest jego prostota i małe zapotrzebowanie na moc obliczeniową, proponowane rozwiązanie, także powinno być stosunkowo proste, aby nie komplikować w znaczący sposób algorytmu.

Omawiana modyfikacja wymaga odpowiedniej transformacji przyjętego modelu obiektu regulacji. Zauważmy, że wykorzystując przekształcony wzór (2.3), można otrzymać wartość wyjścia modelu obiektu w następnej chwili próbkowania:

$$y_{k+1}^M = a_1 \cdot u_k + (a_2 - a_1) \cdot u_{k-1} + \dots + (a_{p_d} - a_{p_d-1}) \cdot u_{k-p_d+1}, \quad (5.1)$$

gdzie  $y_{k+1}^M$  – wartość wyjścia modelu obiektu regulacji w przyszłej chwili,  $u_k$  – wyznaczone sterowanie,  $u_{k-i}$  – przeszłe sterowania,  $a_1, \dots, a_{p_d}$  – rzędne odpowiedzi skokowej obiektu regulacji.

Chcemy, aby były spełnione następujące ograniczenia:

$$y_{k+1}^M \geq y_{\min} \quad \text{oraz} \quad y_{k+1}^M \leq y_{\max}, \quad (5.2)$$

gdzie  $y_{\min}$ ,  $y_{\max}$  – ograniczenia odpowiednio: dolne i górne wartości wyjścia modelu obiektu regulacji.

Ze wzorów (5.1) oraz (5.2) wynikają z kolei następujące nierówności:

$$\begin{aligned} a_1 \cdot u_k + (a_2 - a_1) \cdot u_{k-1} + \dots + (a_{p_d} - a_{p_d-1}) \cdot u_{k-p_d+1} &\geq y_{\min}, \\ a_1 \cdot u_k + (a_2 - a_1) \cdot u_{k-1} + \dots + (a_{p_d} - a_{p_d-1}) \cdot u_{k-p_d+1} &\leq y_{\max}. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Zauważmy, że postać powyższych nierówności wskazuje na to, że spełnienie ograniczenia wartości wyjścia modelu obiektu regulacji można zapewnić przez narzucenie odpowiednich ograniczeń na wartości sterowania. Postać tych ograniczeń jest następująca (przy założeniu, że  $a_1 > 0$ ; dla  $a_1 < 0$  zmienia się kierunek nierówności):



$$u_k \geq \frac{y_{\min} - ps}{a_1}, \quad (5.4)$$

$$u_k \leq \frac{y_{\max} - ps}{a_1},$$

gdzie  $ps = (a_2 - a_1) \cdot u_{k-1} + \dots + (a_{p_d} - a_{p_d-1}) \cdot u_{k-p_d+1}$ .

Ograniczenia opisane wzorami (5.4) należy obliczać w każdej iteracji algorytmu. Następnie należy wyznaczyć minimalną i maksymalną wartość ograniczeń sygnału sterującego, wynikające z ograniczeń wprowadzanych przez urządzenie wykonawcze oraz z nierówności (5.4). Później, wystarczy zastosować metodę rzutowania sterowań na zbiór ograniczeń wyrażoną regułami (2.17).

Zauważmy, że ostatecznie przyjęte ograniczenia mogą być sprzeczne. Wówczas należy, niestety kosztem przekroczenia ograniczeń (5.4), albo zrezygnować z ich uwzględniania w algorytmie albo je złagodzić (zob. rozdz. 4.2.5).

Należy również pamiętać o tym, że w przypadku obiektu z opóźnieniem, zastosowaniem mechanizmu w chwili  $k$  można wpłynąć na spełnienie ograniczenia dopiero dla wartości wyjścia  $y_{k+1+d|k}$  w chwili  $k+d+1$ , gdzie  $d$  – opóźnienie będące wielokrotnością okresu próbkowania. Sytuacja taka miała miejsce w poniższym przykładzie.

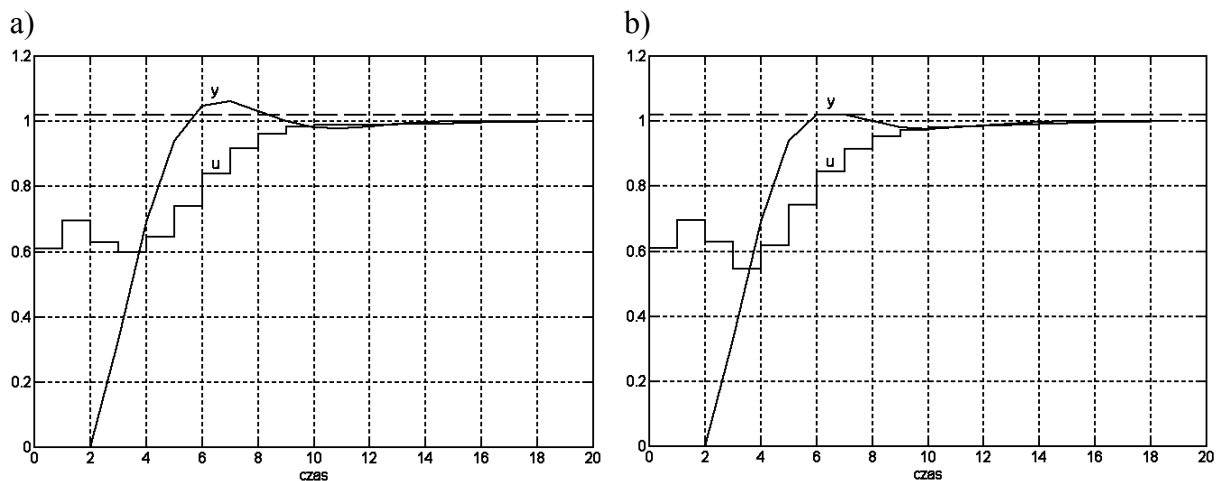
Analogiczne postępowanie można zastosować w przypadku, gdy model obiektu jest opisany równaniami różnicowymi. Zagadnienie to zostało dokładniej opisane przy okazji omawiania przypadku rozmytego.

### Przykład 5.1.

Opisane wyżej podejście zastosowano do przykładowego obiektu z opóźnieniem, danego wzorem:

$$y_k = 0,5371 \cdot u_{k-3} - 0,3204 \cdot u_{k-4} + 1,562 \cdot y_{k-1} - 0,7788 \cdot y_{k-2}. \quad (5.5)$$

Następnie, na podstawie otrzymanej odpowiedzi skokowej, opracowano regulator DMC w wersji analitycznej. Regulator ten testowano w układzie regulacji z dokładnie takim samym obiektem, jak użyty do opracowania regulatora. Uczyniono tak, ponieważ sprawdzano działanie układu regulacji w przypadku uwzględniania ograniczeń nałożonych na wyjścia modelu obiektu regulacji.



Rys. 5.1. Odpowiedzi układu regulacji z algorytmem DMC w wersji analitycznej na skok zadania do wartości  $y_{zad} = 1$ ; ograniczenie na wyjście modelu a) nie uwzględnione, b) uwzględnione w regulatorze;  $u$  – sterowanie,  $y$  – wyjście

W przykładzie przyjęto ograniczenie górne wartości wyjścia modelu obiektu regulacji:  $y \leq 1,02$ . Jedyne ono było w badanym przypadku aktywne. Otrzymane wyniki zostały pokazane na rys. 5.1 i świadczą o skuteczności opisanego metody uwzględniania ograniczeń. Zauważmy, że wprowadzony mechanizm jest stosunkowo prosty i nie komplikuje z nadto analitycznej wersji algorytmu DMC, ponieważ wymaga jedynie skorzystania z nierówności (5.4), często przy okazji uwzględniania ograniczeń nałożonych na sterowania.

### Numeryczna wersja algorytmu DMC

W drugiej odmianie konwencjonalnego algorytmu regulacji DMC, bazującej na rozwiązywaniu zadania optymalizacji kwadratowej z ograniczeniami, wprowadzanie ograniczeń polega na ich dodaniu do zadania optymalizacji. Wszystkie ograniczenia powinny przy tym być wyrażone jako ograniczenia przyrostów sterowania. Transformacja ograniczeń wartości wyjść modelu obiektu regulacji jest najbardziej skomplikowana.

W rozważanym obecnie przypadku podobnie, jak dla wersji analitycznej algorytmu potrzebne jest odpowiednie przekształcenie przyjętego modelu obiektu (2.3). Tym razem, skorzystamy ze wzorów, opisujących przewidywane wartości wyjścia obiektu, używanych podczas formułowania algorytmu.

Przypomnijmy, że mamy do czynienia z następującymi ograniczeniami:

$$\mathbf{y} \geq \mathbf{y}_{\min} \text{ oraz } \mathbf{y} \leq \mathbf{y}_{\max}, \quad (5.6)$$

gdzie  $\mathbf{y} = [y_{k+1|k}, \dots, y_{k+p|k}]^T$  – wektor przewidywanych wartości wyjścia modelu obiektu,  $\mathbf{y}_{\min}, \mathbf{y}_{\max}$  – wektory złożone z elementów będących wartościami ograniczenia odpowiednio: dolnego i górnego nałożonego na wartość wyjścia modelu obiektu. Zauważmy, że przyjęcie w tym miejscu nierówności wektorowych oznacza, że żądamy ograniczenia wartości wyjścia modelu obiektu regulacji na wiele chwil do przodu.

Na podstawie przyjętej postaci modelu obiektu, możemy napisać następujący układ równań wektorowych:

$$\mathbf{y} = \mathbf{A} \cdot \Delta \mathbf{u} + \mathbf{y}_{kw} + \mathbf{w}, \quad (5.7)$$

gdzie  $\mathbf{A}, \Delta \mathbf{u}, \mathbf{w}$  – macierz dynamiczna i wektory jak we wzorze (2.13),  $\mathbf{y}_{kw}$  – wektor złożony z wartości wyjścia w chwili  $k$ .

Wówczas rozpatrywane ograniczenia (5.6) przyjmą postać następujących nierówności wektorowych:

$$\mathbf{A} \cdot \Delta \mathbf{u} \geq \mathbf{y}_{\min} - \mathbf{y}_{kw} - \mathbf{w}, \quad (5.8)$$

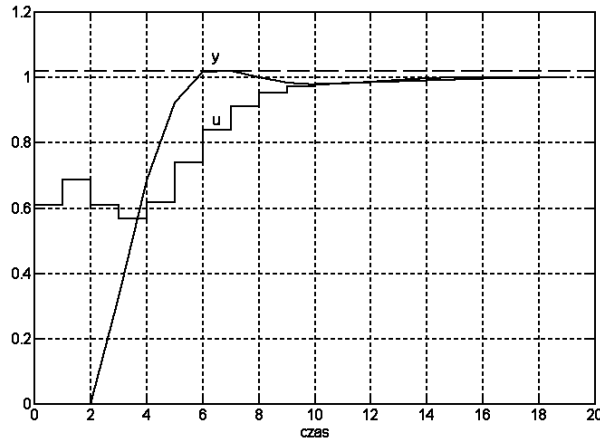
$$\mathbf{A} \cdot \Delta \mathbf{u} \leq \mathbf{y}_{\max} - \mathbf{y}_{kw} - \mathbf{w}.$$

Tak przekształcone nierówności mogą następnie posłużyć do sformułowania zadania optymalizacji (2.18). Warto podkreślić w tym miejscu różnicę pomiędzy sposobem uwzględniania rozpatrywanych ograniczeń w wersji analitycznej algorytmu regulacji DMC i w wersji z optymalizacją. Polega ona na tym, że w pierwszym przypadku nasze zabiegi dotyczą jedynie bieżącego sterowania, natomiast w drugim, całego ciągu sterowań. Różnica ta jest widoczna w zamieszczonym przykładzie, choć nie jest znacząca.

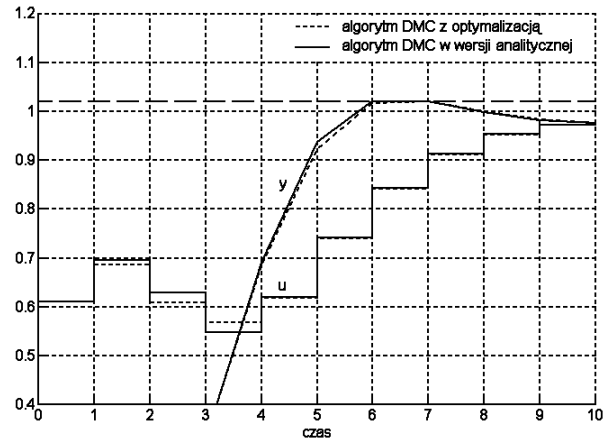
### Przykład 5.2.

Do obiektu takiego, jak poprzednio, zastosowano podejście opracowane dla algorytmu DMC w wersji numerycznej. Eksperyment ujawnił wspomnianą wyżej różnicę w działaniu różnych odmian algorytmu DMC, którą widać po porównaniu przebiegów z rys. 5.1 i 5.2,

spowodowaną sposobem uwzględniania w nich ograniczenia nałożonego na wyjście modelu obiektu regulacji (powiększenie przebiegów sterowania i wyjścia zamieszczono na rys. 5.3). Ponieważ w przypadku regulatora w wersji z optymalizacją kwadratową, wprowadzone ograniczenia są uwzględniane na wiele chwil do przodu, to regulator może zawnoczu zmienić sterowania tak, aby przyjęty wskaźnik jakości był minimalizowany. Prowadzi to do nieco łagodniejszego przebiegu sterowania (przyrosty sterowania są nieco mniejsze) niż w przypadku regulatora DMC w wersji analitycznej. Warto jednak zauważyć, że metoda uwzględniania ograniczeń użyta w analitycznej wersji algorytmu, w tym przypadku, niewiele ustępuje metodzie polegającej na rozwiązywaniu zadania optymalizacji, a jest mniej skomplikowana.



Rys. 5.2. Odpowiedź układu regulacji z regulatorem DMC z optymalizacją na skok zadania do wartości  $y_{zad} = 1$ ; ograniczenie wyjścia modelu uwzględnione w regulatorze



Rys. 5.3. Powiększenie odpowiedzi układów regulacji z analitycznym regulatorem DMC i z regulatorem DMC w wersji z optymalizacją

### 5.1.2. Algorytmy FDMC w wersji analitycznej

Przedstawiona w bieżącym rozdziale metoda, jest przeznaczona dla wszystkich regulatorów rozmytych w wersji analitycznej. Jeśli znajdujemy się tylko w jednym obszarze (waga dla jednego i tylko jednego obszaru jest równa 1, zaś pozostałe wagi są równe 0), to postępowanie w danym kroku działania algorytmu jest takie samo, jak dla przypadku liniowego opisanego w rozdz. 5.1.1.

Jeśli natomiast znajdujemy się na granicy obszarów, wówczas sytuacja nieco się komplikuje. Wartość wyjścia modelu obiektu regulacji jest bowiem sumą ważoną wyjść poszczególnych modeli lokalnych, czyli:

$$y_{k+1}^M = \tilde{w}_1 \cdot y_{k+1}^{M,1} + \tilde{w}_2 \cdot y_{k+1}^{M,2} + \dots, \quad (5.9)$$

gdzie  $\tilde{w}_i$  – znormalizowane wagi poszczególnych modeli lokalnych (jeśli zależą one od przeszłych i bieżącej wartości wyjścia obiektu regulacji i od przeszłych sterowań, to w danej chwili możemy je obliczyć i dalej traktować jako znane liczby),  $y_{k+1}^{M,i}$  – wartość wyjścia  $i$ -tego modelu lokalnego.

Ponieważ chcemy uwzględnić w regulatorze ograniczenia wartości wyjść modelu obiektu regulacji, żądamy spełnienia warunków:

$$y_{k+1}^M \geq y_{\min} \quad \text{oraz} \quad y_{k+1}^M \leq y_{\max}. \quad (5.10)$$

Dla uproszczenia opisu, ale bez starty ogólności rozważań, zamieszczone w dalszej części pracy rozważania, są prowadzone przy założeniu, że przejścia zachodzą pomiędzy dwoma obszarami (jednocześnie są aktywne najwyżej dwa modele lokalne). Przy tym założeniu, na podstawie wzoru (5.9), ograniczenia (5.10) można zapisać w postaci:

$$\tilde{w}_1 \cdot y_{k+1}^{M,1} + \tilde{w}_2 \cdot y_{k+1}^{M,2} \geq y_{\min}, \quad (5.11)$$

$$\tilde{w}_1 \cdot y_{k+1}^{M,1} + \tilde{w}_2 \cdot y_{k+1}^{M,2} \leq y_{\max},$$

gdzie przyjęto oznaczenia, jak we wzorach (5.9) i (5.10).

Najpierw rozpatrzmy przypadek, gdy modele lokalne bazują na odpowiedziach skokowych, czyli wyjście każdego modelu lokalnego jest liczone ze wzoru:

$$y_{k+1}^{M,i} = a_1^i \cdot u_k + (a_2^i - a_1^i) \cdot u_{k-1} + \dots + (a_{p_d}^i - a_{p_d-1}^i) \cdot u_{k-p_d+1}, \quad (5.12)$$

gdzie  $a_1^i, \dots, a_{p_d}^i$  – parametry  $i$ -tego modelu lokalnego.

Wówczas, wydzielając we wzorach (5.11) część zależną od przeszłych sterowań oraz od przyszłego sterowania, otrzymuje się:

$$(\tilde{w}_1 \cdot a_1^1 + \tilde{w}_2 \cdot a_1^2) \cdot u_k + \tilde{w}_1 \cdot re^1 + \tilde{w}_2 \cdot re^2 \geq y_{\min}, \quad (5.13)$$

$$(\tilde{w}_1 \cdot a_1^1 + \tilde{w}_2 \cdot a_1^2) \cdot u_k + \tilde{w}_1 \cdot re^1 + \tilde{w}_2 \cdot re^2 \leq y_{\max},$$

gdzie  $re^i = (a_2^i - a_1^i) \cdot u_{k-1} + \dots + (a_{p_d}^i - a_{p_d-1}^i) \cdot u_{k-p_d+1}$ .

Następnie nierówności (5.13) przekształca się do postaci ograniczeń nałożonych na wartości sterowania. Ostateczna postać ograniczeń będzie w takim razie wyrażona następującym wzorem (przy założeniach, że  $a_1^1 \cdot a_1^2 > 0$  – to założenie zapewnia, że nie będzie sytuacji, w której mianownik w poniższych wzorach będzie równy 0 i  $a_1^1 > 0$  – dla  $a_1^1 < 0$  zmieni się kierunek nierówności).

$$u_k \geq \frac{y_{\min} - (\tilde{w}_1 \cdot re^1 + \tilde{w}_2 \cdot re^2)}{(\tilde{w}_1 \cdot a_1^1 + \tilde{w}_2 \cdot a_1^2)}, \quad (5.14)$$

$$u_k \leq \frac{y_{\max} - (\tilde{w}_1 \cdot re^1 + \tilde{w}_2 \cdot re^2)}{(\tilde{w}_1 \cdot a_1^1 + \tilde{w}_2 \cdot a_1^2)}.$$

W każdej iteracji algorytmu, podobnie jak w przypadku konwencjonalnym, są obliczane ograniczenia opisane wzorami (5.14). Potem, są wyznaczane ostateczne wartości ograniczeń dolnych i górnych sygnału sterującego, wynikające z ograniczeń wprowadzanych przez urządzenie wykonawcze oraz ze wzorów (5.14). Następnie jest stosowana metoda rzutowania sterowań na zbiór ograniczeń.

Zauważmy, że powyższe rozumowanie odnosi się do przypadku, gdy model rozmyty obiektu regulacji jest oparty na modelach lokalnych opisanych współczynnikami odpowiedzi skokowych z poszczególnych obszarów. Często jednak wyjściowy model obiektu regulacji ma postać, w której modele lokalne są opisane równaniami różnicowymi:

$$y_{k+1}^{M,i} = b_1^i \cdot y_k + b_2^i \cdot y_{k-1} + \dots + c_1^i \cdot u_k + c_2^i \cdot u_{k-1} + \dots, \quad (5.15)$$

gdzie  $b_1^i, b_2^i, \dots, c_1^i, c_2^i, \dots$  – współczynniki  $i$ -tego modelu lokalnego.

Przyjmijmy, że znajdujemy się w strefie przejściowej pomiędzy obszarami i że aktywne są dwa modele lokalne. Wtedy wystarczy wzór (5.15) wstawić do nierówności (5.11), aby po przekształceniach (wydzieleniu części zależnej od wyznaczanego właśnie sterowania i części zależnej od przeszłości), otrzymać wzory:

$$(\tilde{w}_1 \cdot c_1^1 + \tilde{w}_2 \cdot c_1^2) \cdot u_k + \tilde{w}_1 \cdot re^1 + \tilde{w}_2 \cdot re^2 \geq y_{\min}, \quad (5.16)$$

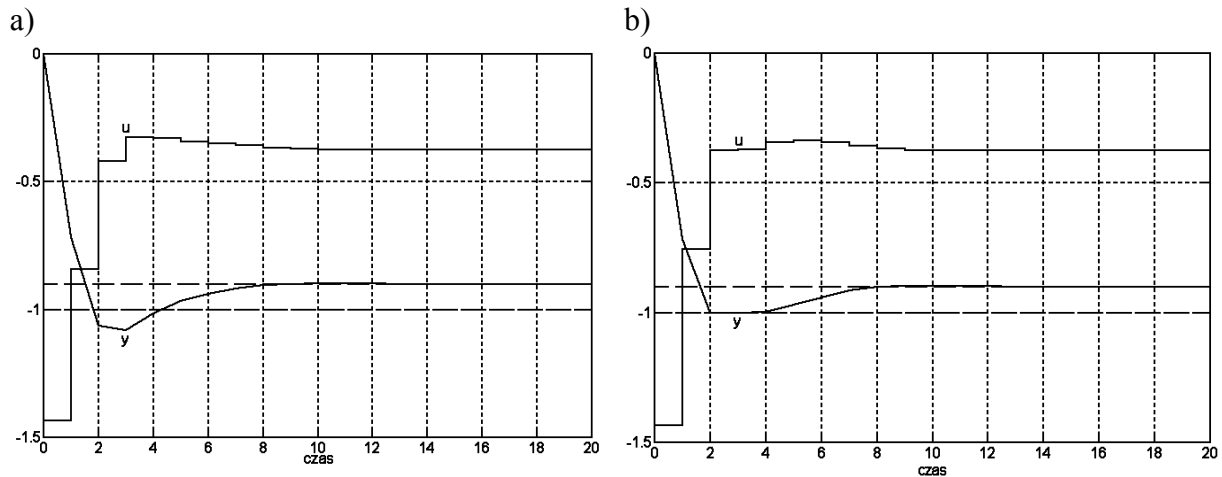
$$(\tilde{w}_1 \cdot c_1^1 + \tilde{w}_2 \cdot c_1^2) \cdot u_k + \tilde{w}_1 \cdot re^1 + \tilde{w}_2 \cdot re^2 \leq y_{\max},$$

gdzie tym razem  $re^i = (c_2^i \cdot u_{k-1} + c_3^i \cdot u_{k-2} + \dots) + (b_1^i \cdot y_k + b_2^i \cdot y_{k-1} + \dots)$ .

Nierówności (5.16) można przekształcić, analogicznie jak wzory (5.13), do postaci ograniczeń nałożonych na wartość obecnie wyznaczanego sterowania, a w algorytmie zastosować metodę rzutowania sterowań na zbiór ograniczeń.

### Przykład 5.3.

Podjęcie opisane wyżej zastosowano do obiektu nieliniowego z przykładu 4.2. W tym celu opracowano rozmyty regulator DMC w wersji analitycznej, z przedstawionym wyżej mechanizmem uwzględniania ograniczeń.



Rys. 5.4. Odpowiedzi układu regulacji z algorytmem FDMC w wersji analitycznej na skok wartości zadanej  $y_{zad} = -0,9$  przy ograniczeniu nałożonym na wyjście modelu obiektu regulacji a) nie uwzględnionym, b) uwzględnionym w regulatorze;  $u$  – sterowanie,  $y$  – wyjście

Działanie regulatora sprawdzono w układzie regulacji z obiektem takim samym, jak użyty do opracowania regulatora, ponieważ testowano mechanizm uwzględniania ograniczeń nałożonych na wyjścia modelu obiektu regulacji. Podczas badań przyjęto dolne ograniczenie wartości wyjścia modelu obiektu regulacji:  $y \geq -1$  i jedynie to ograniczenie było aktywne. Przykładowe przebiegi, otrzymane w testowanym układzie regulacji (rys. 5.4), ilustrują skuteczność działania zaproponowanej metody.

### 5.1.3. Algorytmy FDMC w wersji numerycznej

W przypadku algorytmu w wersji numerycznej, wszystkie ograniczenia należy sprowadzić do postaci ograniczeń wartości przyrostów sterowania. W tym celu, do zależności (5.13) lub (5.16), w zależności od rozpatrywanego przypadku, należy podstawić:

$$u_k = u_{k-1} + \Delta u_k, \quad (5.17)$$

gdzie  $u_k$  – wyznaczana wartość sterowania,  $u_{k-1}$  – wartość sterowania z poprzedniej chwili próbkowania,  $\Delta u_k$  – wyznaczany przyrost sterowania. Wtedy, dla przypadku, gdy rozważania

są oparte na modelu w postaci współczynników odpowiedzi skokowej, otrzymuje się następujące nierówności (dla modelu złożonego z lokalnych modeli w postaci równań różnicowych, otrzyma się analogiczne zależności):

$$\begin{aligned} (\tilde{w}_1 \cdot a_1^1 + \tilde{w}_2 \cdot a_1^2) \cdot (u_{k-1} + \Delta u_k) + \tilde{w}_1 \cdot re^1 + \tilde{w}_2 \cdot re^1 &\geq y_{\min}, \\ (\tilde{w}_1 \cdot a_1^1 + \tilde{w}_2 \cdot a_1^2) \cdot (u_{k-1} + \Delta u_k) + \tilde{w}_1 \cdot re^1 + \tilde{w}_2 \cdot re^2 &\leq y_{\max}, \end{aligned} \quad (5.18)$$

gdzie oznaczenia przyjęto takie, jak we wzorach (5.13) i (5.17).

Po dalszych przekształceniach otrzymamy:

$$\begin{aligned} (\tilde{w}_1 \cdot a_1^1 + \tilde{w}_2 \cdot a_1^2) \cdot \Delta u_k + \tilde{w}_1 \cdot (re^1 + a_1^1 \cdot u_{k-1}) + \tilde{w}_2 \cdot (re^2 + a_1^2 \cdot u_{k-1}) &\geq y_{\min}, \\ (\tilde{w}_1 \cdot a_1^1 + \tilde{w}_2 \cdot a_1^2) \cdot \Delta u_k + \tilde{w}_1 \cdot (re^1 + a_1^1 \cdot u_{k-1}) + \tilde{w}_2 \cdot (re^2 + a_1^2 \cdot u_{k-1}) &\leq y_{\max}. \end{aligned} \quad (5.19)$$

Ostatecznie, po przekształceniach wzoru (5.19), dostajemy nierówności:

$$\begin{aligned} (\tilde{w}_1 \cdot a_1^1 + \tilde{w}_2 \cdot a_1^2) \cdot \Delta u_k &\geq y_{\min} - \tilde{w}_1 \cdot (re^1 + a_1^1 \cdot u_{k-1}) - \tilde{w}_2 \cdot (re^2 + a_1^2 \cdot u_{k-1}), \\ (\tilde{w}_1 \cdot a_1^1 + \tilde{w}_2 \cdot a_1^2) \cdot \Delta u_k &\leq y_{\max} - \tilde{w}_1 \cdot (re^1 + a_1^1 \cdot u_{k-1}) - \tilde{w}_2 \cdot (re^2 + a_1^2 \cdot u_{k-1}), \end{aligned} \quad (5.20)$$

które mogą zostać użyte w trakcie formułowania zadania optymalizacji kwadratowej z ograniczeniami.

Niestety, przekształcanie w podobny sposób zależności dla przewidywanych wartości wyjścia modelu obiektu regulacji w chwilach dalszych niż  $(k+1)$ -sza, prowadzi w ogólności do otrzymania zależności nieliniowych ze względu na występowanie przełączeń pomiędzy obszarami (wagi w dalszych chwilach zależą bowiem od dopiero wyznaczanych sterowań). W takiej sytuacji, dla dalszych chwil, można w razie potrzeby wprowadzić ograniczenia przewidywanych wartości wyjść obiektu regulacji, wyznaczonych przy użyciu predykcji liniowej lub bardziej zaawansowanych metod predykcji, opartych na modelach nieliniowych i stosowanych w regulatorach FDMC w wersji numerycznej (rozdz. 3.3).

## 5.2. Sterowanie przy ograniczeniach nałożonych na wyjścia obiektu regulacji

Niniejszy rozdział dotyczy kwestii uwzględniania ograniczeń nałożonych na wyjścia obiektu regulacji. Jest to zagadnienie o znaczeniu praktycznym ze względu na konieczność zapewnienia bezpiecznej pracy rzeczywistych obiektów lub utrzymanie odpowiedniej jakości produktu. Przykładem może być tutaj przemysł chemiczny, gdzie przekroczenie ograniczeń nałożonych na czystość produktu, może prowadzić do bezużyteczności otrzymanej substancji, a co za tym idzie, do strat ekonomicznych.

Poruszone tutaj zagadnienie jest o tyle trudne, że aby można było pokusić się o jego rozwiązanie, trzeba najpierw coś wiedzieć o niepewności modelu, którym dysponujemy. W niniejszej pracy są rozważane dwa sposoby opisu niepewności. Albo jest ona modelowana jako zakłócenie dodawane do wyjścia modelu obiektu regulacji, albo wynika z niedokładnej znajomości parametrów modelu obiektu. Przedstawione w dalszej części niniejszego rozdziału sposoby uwzględniania ograniczeń nałożonych na wyjścia obiektu regulacji przy założonej niepewności są oparte na metodzie rozpatrywania najgorszego przypadku.

### 5.2.1. Przypadek niepewności modelowanej jako zakłócenie dodawane do wyjścia modelu obiektu regulacji

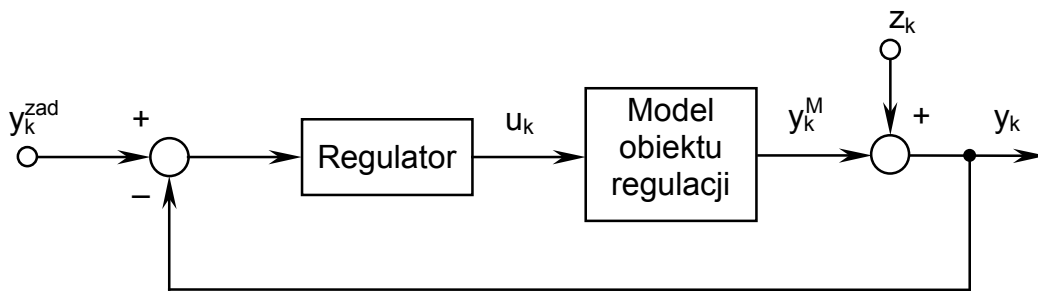
Przyjmijmy, że niepewność jest modelowana jako pewne zakłócenie dodawane do wyjścia modelu obiektu regulacji analogicznie, jak np. w pracy [8]. Sytuację tę, zilustrowaną na rys. 5.5, można opisać następującym wzorem:

$$y_k = y_k^M + z_k \quad (5.21)$$

gdzie  $y_k$  – wyjście obiektu regulacji,  $y_k^M$  – wyjście modelu obiektu regulacji oraz  $z_k$  – zakłócenie modelujące niepewność. Przyjęto przy tym, że wartości minimalna i maksymalna zakłócenia są znane, a dokładnie, że:

$$z_{\min} \leq z_k \leq z_{\max}, \quad (5.22)$$

gdzie  $z_{\min}$ ,  $z_{\max}$  – minimalna i maksymalna wartość zakłócenia  $z_k$ .



Rys. 5.5. Schemat blokowy rozpatrywanych układów regulacji

#### Algorytmy DMC i FDMC w wersji analitycznej

Rozpatrywane ograniczenia można uwzględnić w analitycznej wersji algorytmów analogicznie, jak ograniczenia wartości wyjść modelu obiektu regulacji. Rozpatrzmy od razu przypadek, gdy znajdujemy się na granicy obszarów. W przypadku konwencjonalnym lub gdy jest aktywny tylko jeden model lokalny, wystarczy bowiem w poniższych wzorach przyjąć jedną wagę równą 1, a pozostałe równe 0. Wówczas na podstawie wzorów (5.9) i (5.21), otrzymamy następującą prognozę wartości wyjścia obiektu regulacji w przyszłej chwili próbkowania (dla prostoty przedstawienia, bez straty ogólności, przyjęto że są aktywne najwyżej dwa modele lokalne):

$$y_{k+1} = \tilde{w}_1 \cdot y_{k+1}^{M,1} + \tilde{w}_2 \cdot y_{k+1}^{M,2} + z_{k+1}, \quad (5.23)$$

gdzie  $z_{k+1}$  – zakłócenie w chwili  $k+1$ ; resztę oznaczeń przyjęto, jak we wzorze (5.9).

Zwróćmy uwagę na to, że jeśli wagi zależą od wyjść obiektu regulacji w chwilach poprzednich i bieżącej oraz od poprzednich wartości sterowań, to są w bieżącej chwili znane. Pozostaje więc w przybliżeniu określić, na podstawie zależności (5.22), jaką wartość przyjmie zakłócenie  $z_{k+1}$ .

Załóżmy na początek, że model jest złożony z modeli lokalnych opisanych wzorem (5.12), czyli opartych na odpowiedziach skokowych obiektu regulacji z różnych punktów pracy. Wówczas wzór (5.23), po wyodrębnieniu części zależnej od przeszłości i od wyznaczanego sterowania, można zapisać jako:

$$y_{k+1} = (\tilde{w}_1 \cdot a_1^1 + \tilde{w}_2 \cdot a_1^2) \cdot u_k + \tilde{w}_1 \cdot re^1 + \tilde{w}_2 \cdot re^2 + z_{k+1}, \quad (5.24)$$

gdzie  $a_1^1$ ,  $a_1^2$ ,  $re^1$ ,  $re^2$  przyjęto takie, jak we wzorze (5.13).

Na podstawie oszacowania ostatniego składnika ze wzoru (5.24), korzystając bezpośrednio z zależności (5.22), otrzymujemy wzory opisujące najmniejszą i największą wartość wyjścia obiektu regulacji:

$$\begin{aligned} y_{k+1}^{\min} &= (\tilde{w}_1 \cdot a_1^1 + \tilde{w}_2 \cdot a_1^2) \cdot u_k + \tilde{w}_1 \cdot re^1 + \tilde{w}_2 \cdot re^2 + z_{\min}, \\ y_{k+1}^{\max} &= (\tilde{w}_1 \cdot a_1^1 + \tilde{w}_2 \cdot a_1^2) \cdot u_k + \tilde{w}_1 \cdot re^1 + \tilde{w}_2 \cdot re^2 + z_{\max}. \end{aligned} \quad (5.25)$$

Żądamy spełnienia następujących ograniczeń:

$$y_{k+1}^{\min} \geq y_{\min} \quad \text{oraz} \quad y_{k+1}^{\max} \leq y_{\max}, \quad (5.26)$$

gdzie  $y_{\min}, y_{\max}$  – ograniczenie odpowiednio: dolne i górne wartości wyjścia obiektu regulacji.

Po podstawieniu wzorów (5.25) do ograniczeń (5.26), otrzymujemy następujące nierówności:

$$\begin{aligned} u_k &\geq \frac{y_{\min} - z_{\min} - \tilde{w}_1 \cdot re^1 - \tilde{w}_2 \cdot re^2}{\tilde{w}_1 \cdot a_1^1 + \tilde{w}_2 \cdot a_1^2}, \\ u_k &\leq \frac{y_{\max} - z_{\max} - \tilde{w}_1 \cdot re^1 - \tilde{w}_2 \cdot re^2}{\tilde{w}_1 \cdot a_1^1 + \tilde{w}_2 \cdot a_1^2}. \end{aligned} \quad (5.27)$$

Następnie jest stosowana metoda z rozdz. 5.1, tzn. są ustalane wartości górnego i dolnego ograniczenia sygnału sterującego i jest używane podejście rzutowania sterowań na zbiór ograniczeń. Zwróćmy uwagę na to, że jeśli dokonamy prawidłowego oszacowania niepewności modelowania obiektu, czyli gdy zależność (5.22) jest prawdziwa, wówczas ograniczenia wyjścia obiektu regulacji będą na pewno spełnione.

Podobny sposób postępowania można zastosować w przypadku, gdy modele lokalne mają postać równań różnicowych (5.15). Wtedy jednak, we wzorach pojawiają się składniki zależne od wartości wyjść obiektu regulacji z poprzednich chwil próbkowania. W takim razie, po podstawieniu do wzoru (5.23) zależności (5.15), otrzymamy:

$$y_{k+1} = (\tilde{w}_1 \cdot c_1^1 + \tilde{w}_2 \cdot c_1^2) \cdot u_k + \tilde{w}_1 \cdot re^1 + \tilde{w}_2 \cdot re^2 + z_{k+1}, \quad (5.28)$$

gdzie  $c_1^1, c_1^2, re^1, re^2$  – jak we wzorze (5.16).

Po dokonaniu oszacowania takiego, jak poprzednio, dostajemy:

$$\begin{aligned} y_{k+1}^{\min} &= (\tilde{w}_1 \cdot c_1^1 + \tilde{w}_2 \cdot c_1^2) \cdot u_k + \tilde{w}_1 \cdot re^1 + \tilde{w}_2 \cdot re^2 + z_{\min}, \\ y_{k+1}^{\max} &= (\tilde{w}_1 \cdot c_1^1 + \tilde{w}_2 \cdot c_1^2) \cdot u_k + \tilde{w}_1 \cdot re^1 + \tilde{w}_2 \cdot re^2 + z_{\max}. \end{aligned} \quad (5.29)$$

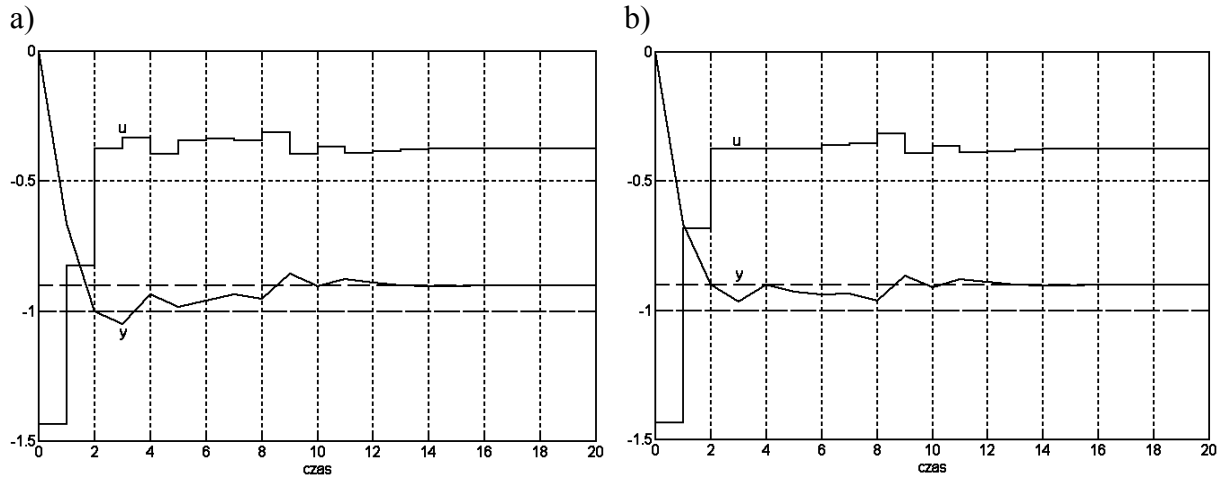
Dalsza część algorytmu pozostaje bez zmian.

#### Przykład 5.4.

Poniżej przedstawiono wyniki badań symulacyjnych, ilustrujące skuteczność proponowanego rozwiązania, uzyskane w układzie regulacji z obiektem z przykładu 5.3 i z regulatorem zawierającym opisane wyżej mechanizmy uwzględniania ograniczeń wartości wyjść obiektu regulacji; zakłócenie zmieniało się w granicach  $-0,05 \leq z_k \leq 0,05$ .

W sytuacji, gdy w przypadku istnienia niepewności zostanie zastosowana metoda uwzględniania ograniczeń dla modelu obiektu regulacji, ograniczenie może zostać naruszone (rys. 5.6a). Dopiero zastosowanie opracowanej metody daje gwarancję działania w dopuszczalnym obszarze (rys. 5.6b), pod warunkiem jednak, że oszacowanie niepewności było dostatecznie dokładne.





Rys. 5.6. Odpowiedzi układu regulacji z algorytmem FDMC w wersji analitycznej na skok wartości zadanej  $y_{zad} = -0,9$  przy ograniczeniu nałożonym na wyjście a) modelu obiektu regulacji, b) obiektu regulacji;  $u$  – sterowanie,  $y$  – wyjście

### Algorytmy DMC i FDMC w wersji numerycznej

Podobnie, jak w przypadku dotyczącym ograniczeń wartości wyjść modelu obiektu regulacji, ze względu na sformułowanie problemu w postaci zadania optymalizacji kwadratowej z ograniczeniami, wszystkie ograniczenia będziemy sprowadzać do postaci ograniczeń wartości przyrostów sterowania, w sposób opisany w rozdz. 5.1.3.

W przypadku, gdy są aktywne dwa modele lokalne, na podstawie zależności (5.25), wyrażenia opisujące najmniejsze i największe wartości wyjścia obiektu regulacji w następnej chwili, przyjmą postać poniższych zależności (jeśli aktywnych jest więcej modeli lokalnych, to otrzymane zależności będą analogiczne, jednak z większą liczbą składników):

$$y_{k+1}^{\min} = (\tilde{w}_1 \cdot a_1^1 + \tilde{w}_2 \cdot a_1^2) \cdot (u_{k-1} + \Delta u_k) + \tilde{w}_1 \cdot re^1 + \tilde{w}_2 \cdot re^2 + z_{\min}, \quad (5.30)$$

$$y_{k+1}^{\max} = (\tilde{w}_1 \cdot a_1^1 + \tilde{w}_2 \cdot a_1^2) \cdot (u_{k-1} + \Delta u_k) + \tilde{w}_1 \cdot re^1 + \tilde{w}_2 \cdot re^2 + z_{\max},$$

gdzie oznaczenia przyjęto takie, jak we wzorach (5.17) i (5.25). Po pogrupowaniu wyrazów zależnych od przeszłości otrzymamy:

$$y_{k+1}^{\min} = (\tilde{w}_1 \cdot a_1^1 + \tilde{w}_2 \cdot a_1^2) \cdot \Delta u_k + \tilde{w}_1 \cdot re^1 + \tilde{w}_2 \cdot re^2 + (\tilde{w}_1 \cdot a_1^1 + \tilde{w}_2 \cdot a_1^2) \cdot u_{k-1} + z_{\min}, \quad (5.31)$$

$$y_{k+1}^{\max} = (\tilde{w}_1 \cdot a_1^1 + \tilde{w}_2 \cdot a_1^2) \cdot \Delta u_k + \tilde{w}_1 \cdot re^1 + \tilde{w}_2 \cdot re^2 + (\tilde{w}_1 \cdot a_1^1 + \tilde{w}_2 \cdot a_1^2) \cdot u_{k-1} + z_{\max}.$$

Następnie, po podstawieniu wzorów (5.31) do ograniczeń (5.26) i pogrupowaniu wyrazów, otrzymujemy:

$$(\tilde{w}_1 \cdot a_1^1 + \tilde{w}_2 \cdot a_1^2) \cdot \Delta u_k \geq y_{\min} - \tilde{w}_1 \cdot re^1 - \tilde{w}_2 \cdot re^2 - (\tilde{w}_1 \cdot a_1^1 + \tilde{w}_2 \cdot a_1^2) \cdot u_{k-1} - z_{\min}, \quad (5.32)$$

$$(\tilde{w}_1 \cdot a_1^1 + \tilde{w}_2 \cdot a_1^2) \cdot \Delta u_k \leq y_{\max} - \tilde{w}_1 \cdot re^1 - \tilde{w}_2 \cdot re^2 - (\tilde{w}_1 \cdot a_1^1 + \tilde{w}_2 \cdot a_1^2) \cdot u_{k-1} - z_{\max}.$$

Uzyskane nierówności są następnie używane w trakcie formułowania zadania optymalizacji kwadratowej, powtarzanego w każdym kroku działania regulatora.

Zauważmy, że za pomocą nierówności (5.32), można wymusić ograniczenie wyjść tylko dla przyszłej chwili. O ile w przypadku algorytmu w wersji analitycznej tylko to ograniczenie może zostać uwzględnione, o tyle w algorytmie z optymalizacją, istnieje możliwość wprowadzenia ograniczenia dla całego horyzontu predykcji. W pracy [8] jest rozpatrywany właśnie

ten problem przy niepewności modelowanej jako dodane zakłócenie, jednak w przypadku konwencjonalnego algorytmu predykcyjnego (tzn. z liniowym modelem procesu). Zamieszczone tam rozwiązanie umożliwia uwzględnienie ograniczeń wartości wyjść w warunkach niepewności modelowania, na całym horyzoncie predykcji.

Przypomnijmy jednak, że głównym przedmiotem naszego zainteresowania jest przypadek nieliniowy, a dokładnie rozmyty, w którym sytuacja jest bardziej skomplikowana. Jest tak, ponieważ ograniczenia wartości wyjść w dalszych niż  $(k+1)$ -sza chwilach, zależą w ogólności nieliniowo od sterowań (rozdz. 5.1.3). W takim razie nie będzie można w prosty sposób uwzględnić tych ograniczeń w przypadku, w którym podstawowym wymaganiem jest sformułowanie zadania optymalizacji kwadratowej z liniowymi ograniczeniami.

Za pomocą opisanych wyżej mechanizmów, można jednak narzucać ograniczenia na wartość wyjścia w przyszłym kroku, co powinno być w większości przypadków wystarczające, ponieważ do sterowania w każdej chwili jest używana jedynie wartość sterowania  $u_{k|k}$ .

## 5.2.2. Przypadek niepewności wynikającej z niedokładnej znajomości parametrów modelu obiektu regulacji

### Algorytmy DMC i FDMC w wersji analitycznej

Przyjmijmy tym razem, że wartość wyjścia obiektu regulacji w kolejnej chwili próbkowania jest opisana zależnością:

$$y_{k+1} = a_{1,pr} \cdot u_k + (a_{2,pr} - a_{1,pr}) \cdot u_{k-1} + \dots + (a_{p_d,pr} - a_{p_d-1,pr}) \cdot u_{k-p_d+1}, \quad (5.33)$$

gdzie  $y_{k+1}$  – wartość wyjścia obiektu regulacji w przyszłej chwili,  $a_{1,pr}, \dots, a_{p_d,pr}$  – rzędne odpowiedzi skokowej obiektu regulacji, które nie są nam znane.

Powyższe wyrażenie obowiązuje w przypadku rozmytym, gdy znajdujemy się tylko w jednym obszarze (waga dla jednego i tylko jednego obszaru jest równa 1, zaś pozostałe wagi są równe 0), a także dla algorytmu konwencjonalnego. Najpierw rozpatrzmy tę sytuację.

Dalsze rozważania są prowadzone przy założeniu, że każdy ze współczynników odpowiedzi skokowej jest znany niedokładnie, ale znamy granice tej niedokładności, tzn. wartość maksymalną i minimalną każdego współczynnika; opisuje to wzór (5.34):

$$a_{n,min} \leq a_{n,pr} \leq a_{n,max}, \quad (5.34)$$

gdzie  $a_{n,pr}$  – rzeczywista wartość  $n$ -tego współczynnika (nie jest nam znana),  $a_{n,min}$  – minimalna wartość  $n$ -tego współczynnika,  $a_{n,max}$  – maksymalna wartość  $n$ -tego współczynnika.

Przyjmijmy następujące zależności (5.35):

$$a_{n,pr} = a_n + \Delta a_n, \quad a_{n,min} = a_n + \Delta a_{n,min}, \quad a_{n,max} = a_n + \Delta a_{n,max}, \quad (5.35)$$

gdzie  $a_n$  –  $n$ -ty parametr modelu obiektu regulacji (jest nam znany),  $a_{n,pr}$ ,  $a_{n,min}$ ,  $a_{n,max}$  – jak we wzorze (5.34),  $\Delta a_n$ ,  $\Delta a_{n,min}$ ,  $\Delta a_{n,max}$  – różnice pomiędzy parametrem  $a_n$  a parametrami odpowiednio  $a_{n,pr}$ ,  $a_{n,min}$ ,  $a_{n,max}$ , zauważmy, że nie znamy wartości składnika  $\Delta a_n$ . Ponadto zakładamy, że  $\Delta a_{n,min} \leq 0$  i  $\Delta a_{n,max} \geq 0$ .

Po dokonaniu podstawień z wykorzystaniem równości (5.35), nierówności (5.34) możemy zapisać w następujący sposób:

$$\Delta a_{n,min} \leq \Delta a_n \leq \Delta a_{n,max}, \quad (5.36)$$

gdzie oznaczenia przyjęto jak we wzorach (5.35).

W takim razie, po przekształceniu wzoru (5.33) i uwzględnieniu pierwszej z zależności (5.35), wartość wyjścia obiektu regulacji w przyszłej chwili jest określona wzorem:

$$y_{k+1} = (a_1 + \Delta a_1) \cdot u_k + (a_2 - a_1 + \Delta a_2 - \Delta a_1) \cdot u_{k-1} + \dots + (a_{p_d} - a_{p_d-1} + \Delta a_{p_d} - \Delta a_{p_d-1}) \cdot u_{k-p_d+1}. \quad (5.37)$$

Powyższe wyrażenie można, po uporządkowaniu wyrazów przekształcić do postaci:

$$y_{k+1} = (a_1 + \Delta a_1) \cdot u_k + re + \Delta re, \quad (5.38)$$

gdzie  $re$  – składnik zależny od przeszłych sterowań i parametrów modelu obiektu regulacji,  $\Delta re$  – składnik zależny od przeszłych sterowań i odchyłeń parametrów obiektu regulacji od przyjętych wartości parametrów modelu obiektu regulacji, przy czym  $re$  i  $\Delta re$  są określone wzorami:

$$re = (a_2 - a_1) \cdot u_{k-1} + \dots + (a_{p_d} - a_{p_d-1}) \cdot u_{k-p_d+1}, \quad (5.39a)$$

$$\Delta re = -\Delta a_1 \cdot u_{k-1} + \Delta a_2 \cdot (u_{k-1} - u_{k-2}) + \dots + \Delta a_{p_d-1} \cdot (u_{k-p_d+2} - u_{k-p_d+1}) + \Delta a_{p_d} \cdot u_{k-p_d+1}. \quad (5.39b)$$

Następnie chcemy dokonać oszacowania wartości minimalnej i maksymalnej wyjścia obiektu regulacji w przyszłej chwili. Aby zapewnić zachowanie ograniczeń nałożonych na wartości wyjścia obiektu regulacji, rozpatrujemy najgorszy przypadek.

Zauważmy, że składnik  $re$  będzie w obu oszacowaniach taki sam i zależny jedynie od przeszłych (znanych) sterowań. Dlatego pozostaje do oszacowania wartość minimalna i maksymalna składnika  $\Delta re$ , gdyż zależą one między innymi od niedokładności parametrów przyjętego modelu obiektu regulacji. Poszczególne wyrazy składnika  $\Delta re$  należy szacować zgodnie z poniższym schematem.

Jeśli szacujemy minimalną wartość wyjścia obiektu regulacji w przyszłej chwili na podstawie wzorów (5.38) i (5.39), to:

1. W przypadku składnika zależnego od  $\Delta a_1$  ze wzoru (5.39b):
  - jeśli  $u_{k-1} < 0$ , to do obliczeń przyjmujemy  $\Delta a_1 = \Delta a_{1,\min}$ ,
  - jeśli  $u_{k-1} > 0$ , to do obliczeń przyjmujemy  $\Delta a_1 = \Delta a_{1,\max}$ .
2. W przypadku składnika zależnego od  $\Delta a_{p_d}$ :
  - jeśli  $u_{k-p_d+1} < 0$ , to do obliczeń przyjmujemy  $\Delta a_{p_d} = \Delta a_{p_d,\max}$ ,
  - jeśli  $u_{k-p_d+1} > 0$ , to do obliczeń przyjmujemy  $\Delta a_{p_d} = \Delta a_{p_d,\min}$ .
3. W przypadku pozostałych składników:
  - jeśli  $\Delta u_{k-m} < 0$ ;  $m = 1, \dots, (p_d-2)$ , to do obliczeń przyjmujemy  $\Delta a_{m+1} = \Delta a_{m+1,\max}$ ,
  - jeśli  $\Delta u_{k-m} > 0$ ;  $m = 1, \dots, (p_d-2)$ , to do obliczeń przyjmujemy  $\Delta a_{m+1} = \Delta a_{m+1,\min}$ .

Jeśli dokonujemy szacowania maksimum wartości wyjścia obiektu, postępujemy odwrotnie niż powyżej, tzn.:

1. W przypadku składnika zależnego od  $\Delta a_1$  ze wzoru (5.39b):
  - jeśli  $u_{k-1} < 0$ , to do obliczeń przyjmujemy  $\Delta a_1 = \Delta a_{1,\max}$ ,
  - jeśli  $u_{k-1} > 0$ , to do obliczeń przyjmujemy  $\Delta a_1 = \Delta a_{1,\min}$ .
2. W przypadku składnika zależnego od  $\Delta a_{p_d}$ :
  - jeśli  $u_{k-p_d+1} < 0$ , to do obliczeń przyjmujemy  $\Delta a_{p_d} = \Delta a_{p_d,\min}$ ,
  - jeśli  $u_{k-p_d+1} > 0$ , to do obliczeń przyjmujemy  $\Delta a_{p_d} = \Delta a_{p_d,\max}$ .

3. W przypadku pozostałych składników:

— jeśli  $\Delta u_{k-m} < 0$ ;  $m = 1, \dots, (p_d - 2)$ , to do obliczeń przyjmujemy  $\Delta a_{m+1} = \Delta a_{m+1, \min}$ ,

— jeśli  $\Delta u_{k-m} > 0$ ;  $m = 1, \dots, (p_d - 2)$ , to do obliczeń przyjmujemy  $\Delta a_{m+1} = \Delta a_{m+1, \max}$ .

Ostatecznie otrzymujemy:

$$y_{k+1}^{\min} = (a_1 + \Delta a_1) \cdot u_k + re + \Delta re_{\min}, \quad (5.40)$$

$$y_{k+1}^{\max} = (a_1 + \Delta a_1) \cdot u_k + re + \Delta re_{\max},$$

gdzie  $y_{k+1}^{\min}$ ,  $y_{k+1}^{\max}$  – minimalna i maksymalna wartość wyjścia obiektu regulacji w przyszłej chwili próbkowania, przy założonej niepewności parametrów,  $\Delta re_{\min}$ ,  $\Delta re_{\max}$  – minimalna i maksymalna wartość składnika  $\Delta re$ , danego wzorem (5.39b), po dokonaniu szacowań jego wartości w przedstawiony wyżej sposób.

Aby były zachowane ograniczenia nałożone na wyjścia obiektu regulacji, żądamy spełnienia następujących nierówności:

$$y_{k+1}^{\min} \geq y_{\min} \quad \text{oraz} \quad y_{k+1}^{\max} \leq y_{\max}, \quad (5.41)$$

gdzie  $y_{\min}$ ,  $y_{\max}$  – ograniczenia dolne i górne wartości wyjścia obiektu regulacji.

Po podstawieniu oszacowanych wartości minimalnej i maksymalnej wyjścia obiektu regulacji, określonych wzorami (5.40), do odpowiednich nierówności (5.41), otrzymujemy (przy założeniu, że mianowniki tych nierówności są większe od zera, w przeciwnym przypadku zmieni się kierunek poniższych nierówności):

1a. Jeśli  $(y_{\min} - re - \Delta re_{\min}) > 0$ , to:

$$u_k \geq \frac{y_{\min} - re - \Delta re_{\min}}{a_1 + \Delta a_{1, \min}}, \quad (5.42a)$$

1b. Jeśli  $(y_{\min} - re - \Delta re_{\min}) < 0$ , to:

$$u_k \geq \frac{y_{\min} - re - \Delta re_{\min}}{a_1 + \Delta a_{1, \max}}, \quad (5.42b)$$

2a. Jeśli  $(y_{\max} - re - \Delta re_{\max}) > 0$ , to:

$$u_k \leq \frac{y_{\max} - re - \Delta re_{\max}}{a_1 + \Delta a_{1, \max}}, \quad (5.43a)$$

2b. Jeśli  $(y_{\max} - re - \Delta re_{\max}) < 0$ , to:

$$u_k \leq \frac{y_{\max} - re - \Delta re_{\max}}{a_1 + \Delta a_{1, \min}}, \quad (5.43b)$$

Jeśli znajdujemy się na granicy obszarów, wówczas wartość wyjścia obiektu regulacji będzie sumą ważoną wyjść aktywnych modeli lokalnych mających postać opartą na odpowiedzi skokowej (5.33). Wzór określający wartość wyjścia obiektu regulacji w kolejnej chwili próbkowania przyjmie postać:

$$y_{k+1} = \tilde{w}_1 \cdot y_{k+1}^1 + \tilde{w}_2 \cdot y_{k+1}^2 + \dots, \quad (5.44)$$

gdzie  $\tilde{w}_i$  – znormalizowane wagi poszczególnych modeli lokalnych (traktowane jako znane liczby, które można obliczyć na podstawie wartości poszczególnych wielkości z poprzednich chwil próbkowania),  $y_{k+1}^i$  – wartość wyjścia  $i$ -tego modelu lokalnego obliczona ze wzoru:

$$y_{k+1}^i = (a_1^i + \Delta a_1^i) \cdot u_k + re^i + \Delta re^i, \quad (5.45)$$

gdzie  $re^i$  – składniki zależne od przeszłych sterowań i parametrów modelu obiektu regulacji,  $\Delta re^i$  – składniki zależne od przeszłych sterowań i odchyłeń parametrów obiektu regulacji od przyjętych wartości parametrów modelu obiektu regulacji, określone wzorami:

$$re^i = (a_2^i - a_1^i) \cdot u_{k-1} + \dots + (a_{p_d}^i - a_{p_d-1}^i) \cdot u_{k-p_d+1}, \quad (5.46a)$$

$$\Delta re^i = -\Delta a_1^i \cdot u_{k-1} + \Delta a_2^i \cdot (u_{k-1} - u_{k-2}) + \dots + \Delta a_{p_d-1}^i \cdot (u_{k-p_d+2} - u_{k-p_d+1}) + \Delta a_{p_d}^i \cdot u_{k-p_d+1}. \quad (5.46b)$$

Rozważania zamieszczone w dalszej części opracowania są prowadzone, dla uproszczenia opisu, przy założeniu, że przejścia zachodzą pomiędzy dwoma obszarami, czyli dla sytuacji, gdy jednocześnie są aktywne najwyżej dwa modele lokalne:

$$y_{k+1} = [\tilde{w}_1 \cdot (a_1^1 + \Delta a_1^1) + \tilde{w}_2 \cdot (a_1^2 + \Delta a_1^2)] \cdot u_k + \tilde{w}_1 \cdot (re^1 + \Delta re^1) + \tilde{w}_2 \cdot (re^2 + \Delta re^2), \quad (5.47)$$

gdzie oznaczenia przyjęto takie, jak poprzednio.

Ponieważ wartości wag są niemniejsze od zera oraz zakładamy, że niedokładność parametrów w jednym modelu lokalnym jest niezależna od niedokładnej znajomości parametrów pozostałych modeli lokalnych, to dla każdego z modeli lokalnych z osobna, dokonujemy takich oszacowań, jak poprzednio. W wyniku tych oszacowań otrzymujemy:

$$y_{k+1}^{\min} = [\tilde{w}_1 \cdot (a_1^1 + \Delta a_1^1) + \tilde{w}_2 \cdot (a_1^2 + \Delta a_1^2)] \cdot u_k + \tilde{w}_1 \cdot (re^1 + \Delta re_{\min}^1) + \tilde{w}_2 \cdot (re^2 + \Delta re_{\min}^2), \quad (5.48)$$

$$y_{k+1}^{\max} = [\tilde{w}_1 \cdot (a_1^1 + \Delta a_1^1) + \tilde{w}_2 \cdot (a_1^2 + \Delta a_1^2)] \cdot u_k + \tilde{w}_1 \cdot (re^1 + \Delta re_{\max}^1) + \tilde{w}_2 \cdot (re^2 + \Delta re_{\max}^2).$$

Następnie wzory (5.48) należy podstawić do nierówności (5.41) i przekształcić do postaci ograniczeń nałożonych na wartości sterowania. Ostatecznie otrzymamy nierówności analogiczne do (5.42) i (5.43) (przy założeniach, że mianowniki poniższych nierówności są większe od zera, w przeciwnym przypadku zmienia się kierunek tych nierówności oraz że  $(a_1^1 + \Delta a_1^1) > 0$  i  $(a_1^2 + \Delta a_1^2) > 0$ ):

1a. Jeśli  $(y_{\min} - \tilde{w}_1 \cdot re^1 - \tilde{w}_2 \cdot re^2 - \tilde{w}_1 \cdot \Delta re_{\min}^1 - \tilde{w}_2 \cdot \Delta re_{\min}^2) > 0$ , to:

$$u_k \geq \frac{y_{\min} - \tilde{w}_1 \cdot re^1 - \tilde{w}_2 \cdot re^2 - \tilde{w}_1 \cdot \Delta re_{\min}^1 - \tilde{w}_2 \cdot \Delta re_{\min}^2}{\tilde{w}_1 \cdot (a_1^1 + \Delta a_{1,\min}^1) + \tilde{w}_2 \cdot (a_1^2 + \Delta a_{1,\min}^2)}, \quad (5.49a)$$

1b. Jeśli  $(y_{\min} - \tilde{w}_1 \cdot re^1 - \tilde{w}_2 \cdot re^2 - \tilde{w}_1 \cdot \Delta re_{\min}^1 - \tilde{w}_2 \cdot \Delta re_{\min}^2) < 0$ , to:

$$u_k \geq \frac{y_{\min} - \tilde{w}_1 \cdot re^1 - \tilde{w}_2 \cdot re^2 - \tilde{w}_1 \cdot \Delta re_{\min}^1 - \tilde{w}_2 \cdot \Delta re_{\min}^2}{\tilde{w}_1 \cdot (a_1^1 + \Delta a_{1,\max}^1) + \tilde{w}_2 \cdot (a_1^2 + \Delta a_{1,\max}^2)}, \quad (5.49b)$$

2a. Jeśli  $(y_{\max} - \tilde{w}_1 \cdot re^1 - \tilde{w}_2 \cdot re^2 - \tilde{w}_1 \cdot \Delta re_{\max}^1 - \tilde{w}_2 \cdot \Delta re_{\max}^2) > 0$ , to:

$$u_k \leq \frac{y_{\max} - \tilde{w}_1 \cdot re^1 - \tilde{w}_2 \cdot re^2 - \tilde{w}_1 \cdot \Delta re_{\max}^1 - \tilde{w}_2 \cdot \Delta re_{\max}^2}{\tilde{w}_1 \cdot (a_1^1 + \Delta a_{1,\max}^1) + \tilde{w}_2 \cdot (a_1^2 + \Delta a_{1,\max}^2)}, \quad (5.50a)$$

2b. Jeśli  $(y_{\max} - \tilde{w}_1 \cdot re^1 - \tilde{w}_2 \cdot re^2 - \tilde{w}_1 \cdot \Delta re_{\max}^1 - \tilde{w}_2 \cdot \Delta re_{\max}^2) < 0$ , to:

$$u_k \leq \frac{y_{\max} - \tilde{w}_1 \cdot re^1 - \tilde{w}_2 \cdot re^2 - \tilde{w}_1 \cdot \Delta re_{\max}^1 - \tilde{w}_2 \cdot \Delta re_{\max}^2}{\tilde{w}_1 \cdot (a_1^1 + \Delta a_{1,\min}^1) + \tilde{w}_2 \cdot (a_1^2 + \Delta a_{1,\min}^2)}. \quad (5.50b)$$

W każdej iteracji algorytmu, na podstawie dokonanych oszacowań są formułowane ograniczenia wartości wyjścia obiektu regulacji (5.41). Ograniczenia te są następnie przekształcane do postaci ograniczeń nałożonych na wartości sterowań i służą, wraz z wartościami ograniczeń dolnych i górnych sygnału sterującego, wynikających z ograniczeń wprowadzanych przez urządzenie wykonawcze, do określenia ostatecznych wartości ograniczeń. Następnie jest stosowana metoda rzutowania sterowań na zbiór ograniczeń.

Rozpatrzmy teraz przypadek, gdy dysponujemy modelami lokalnymi w postaci równań różnicowych (5.51):

$$y_{k+1}^i = b_1^i \cdot y_k + b_2^i \cdot y_{k-1} + \dots + c_1^i \cdot u_k + c_2^i \cdot u_{k-1} + \dots, \quad (5.51)$$

gdzie  $b_1^i, b_2^i, \dots, c_1^i, c_2^i, \dots$  – parametry  $i$ -tego modelu lokalnego. Wtedy, przy założeniu, że aktywne są co najwyżej dwa modele lokalne, po podstawieniu zależności (5.51) do wzoru (5.44) i pogrupowaniu wyrazów otrzymamy :

$$y_{k+1} = [\tilde{w}_1 \cdot (c_1^1 + \Delta c_1^1) + \tilde{w}_2 \cdot (c_1^2 + \Delta c_1^2)] \cdot u_k + \tilde{w}_1 \cdot (re^1 + \Delta re^1) + \tilde{w}_2 \cdot (re^2 + \Delta re^2), \quad (5.52)$$

gdzie zmianie ulegną składniki  $re^i$  i  $\Delta re^i$  i przybiorą one tym razem postać:

$$re^i = b_1^i \cdot y_k + b_2^i \cdot y_{k-1} + \dots + c_2^i \cdot u_{k-1} + c_3^i \cdot u_{k-2} + \dots, \quad (5.53a)$$

$$\Delta re^i = \Delta b_1^i \cdot y_k + \Delta b_2^i \cdot y_{k-1} + \dots + \Delta c_2^i \cdot u_{k-1} + \Delta c_3^i \cdot u_{k-2} + \dots \quad (5.53b)$$

Pozostała część rozumowania jest analogiczna do zaprezentowanej wyżej. Przy czym poszczególne wyrazy składników  $\Delta re^i$  należy szacować zgodnie ze schematem:

Jeśli szacujemy minimalną wartość wyjścia obiektu regulacji w przyszłej chwili na podstawie wzorów (5.52) i (5.53), to:

1. W przypadku składników zależnych od  $\Delta b_m^i$  ze wzoru (5.53b):

— jeśli  $y_{k-m} < 0$ ;  $m = 0, 1, \dots$ , to do obliczeń przyjmujemy  $\Delta b_{m+1}^i = \Delta b_{m+1, \max}^i$ ,

— jeśli  $y_{k-m} > 0$ ;  $m = 0, 1, \dots$ , to do obliczeń przyjmujemy  $\Delta b_{m+1}^i = \Delta b_{m+1, \min}^i$ .

2. W przypadku składników zależnych od  $\Delta c_m^i$ :

— jeśli  $u_{k-m} < 0$ ;  $m = 1, 2, \dots$ , to do obliczeń przyjmujemy  $\Delta c_{m+1}^i = \Delta c_{m+1, \max}^i$ ,

— jeśli  $u_{k-m} > 0$ ;  $m = 1, 2, \dots$ , to do obliczeń przyjmujemy  $\Delta c_{m+1}^i = \Delta c_{m+1, \min}^i$ .

Jeśli dokonujemy szacowania maksimum wartości wyjścia obiektu, postępujemy odwrotnie niż powyżej, tzn.:

1. W przypadku składników zależnych od  $\Delta b_m^i$  ze wzoru (5.53b):

— jeśli  $y_{k-m} < 0$ ;  $m = 0, 1, \dots$ , to do obliczeń przyjmujemy  $\Delta b_{m+1}^i = \Delta b_{m+1, \min}^i$ ,

— jeśli  $y_{k-m} > 0$ ;  $m = 0, 1, \dots$ , to do obliczeń przyjmujemy  $\Delta b_{m+1}^i = \Delta b_{m+1, \max}^i$ .

2. W przypadku składników zależnych od  $\Delta c_m^i$ :

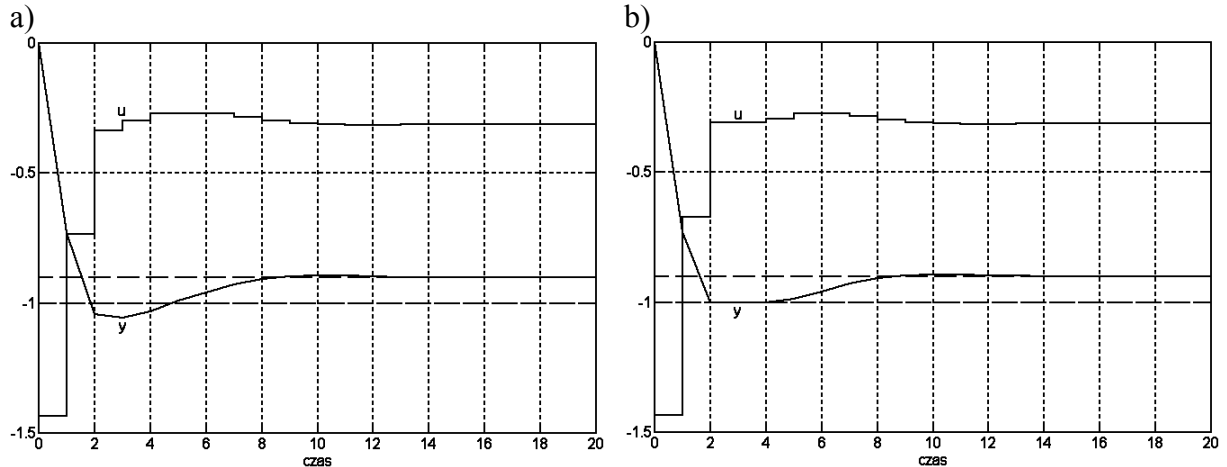
— jeśli  $u_{k-m} < 0$ ;  $m = 1, 2, \dots$ , to do obliczeń przyjmujemy  $\Delta c_{m+1}^i = \Delta c_{m+1, \min}^i$ ,

— jeśli  $u_{k-m} > 0$ ;  $m = 1, 2, \dots$ , to do obliczeń przyjmujemy  $\Delta c_{m+1}^i = \Delta c_{m+1, \max}^i$ .

### Przykład 5.5.

Przedstawione mechanizmy uwzględniania ograniczeń wartości wyjść obiektu regulacji zastosowano w regulatorze dobranym do przykładowego obiektu z przykładu 4.2. Przyjęto przy tym ograniczenie wartości wyjścia obiektu regulacji od dołu  $y_k \geq -1$  oraz następujące zakresy wartości parametrów modelu (zob. wzór (4.75)):

$$b_1^1 = 0,7 \pm 0,05, \quad b_1^2 = 0,3 \pm 0,05, \quad c_1^1 = 0,8 \pm 0,01, \quad c_1^2 = 0,2 \pm 0,01.$$



Rys. 5.7. Odpowiedzi układu regulacji z algorytmem FDMC w wersji analitycznej na skok wartości zadanej  $y_{zad} = -0,9$  przy ograniczeniu nałożonym na wyjście a) modelu obiektu regulacji b) obiektu regulacji;  $u$  – sterowanie,  $y$  – wyjście

Przykładowe wyniki, ilustrujące skuteczność zaproponowanej metody, pokazano na rys. 5.7. Jeśli w modelu obiektu regulacji istnieje niepewność, a nie skorzysta się z informacji o niej i zastosuje metodę uwzględniania ograniczeń dla modelu obiektu regulacji z rozdz. 5.1, to nałożone ograniczenie może zostać naruszone (rys. 5.7a). Natomiast zastosowanie zaproponowanego podejścia, gwarantuje zachowanie ograniczeń (rys. 5.7b), jeśli tylko dysponujemy wystarczająco dokładnym oszacowaniem niepewności.

### Algorytmy DMC i FDMC w wersji numerycznej

Przedstawiony wcześniej mechanizm uwzględniania ograniczeń wartości wyjść obiektu regulacji w przypadku niedokładnej znajomości parametrów modelu obiektu regulacji, można zastosować także w algorytmach DMC w wersji numerycznej. W tym celu należy otrzymać odpowiednie ograniczenia nałożone na przyrosty sterowań. Dokonajmy więc, we wzorze (5.47), następującego podstawienia:

$$u_k = u_{k-1} + \Delta u_k, \quad (5.54)$$

gdzie  $u_k$  – wyznaczana wartość sterowania,  $u_{k-1}$  – wartość sterowania z poprzedniej chwili próbkowania,  $\Delta u_k$  – wyznaczany przyrost sterowania.

Otrzymamy wtedy:

$$y_{k+1} = \left[ \tilde{w}_1 \cdot (a_1^1 + \Delta a_1^1) + \tilde{w}_2 \cdot (a_1^2 + \Delta a_1^2) \right] \cdot (u_{k-1} + \Delta u_k) + \tilde{w}_1 \cdot (re^1 + \Delta re^1) + \tilde{w}_2 \cdot (re^2 + \Delta re^2), \quad (5.55)$$

gdzie oznaczenia przyjęto jak we wzorach (5.47) i (5.54).

Po przekształceniach dostajemy:

$$y_{k+1} = [\tilde{w}_1 \cdot (a_1^1 + \Delta a_1^1) + \tilde{w}_2 \cdot (a_1^2 + \Delta a_1^2)] \cdot \Delta u_k + \tilde{w}_1 \cdot (re_b^1 + \Delta re_b^1) + \tilde{w}_2 \cdot (re_b^2 + \Delta re_b^2), \quad (5.56)$$

gdzie składniki  $re_b^i$  i  $\Delta re_b^i$ , w przypadku, gdy modele lokalne są oparte na współczynnikach odpowiedzi skokowej, są dane wzorami:

$$re_b^i = a_2^i \cdot u_{k-1} + (a_3^i - a_2^i) \cdot u_{k-2} + \dots + (a_{p_d}^i - a_{p_d-1}^i) \cdot u_{k-p_d+1}, \quad (5.57)$$

$$\Delta re_b^i = \Delta a_2^i \cdot (u_{k-1} - u_{k-2}) + \dots + \Delta a_{p_d}^i \cdot (u_{k-p_d+2} - u_{k-p_d+1}) + \Delta a_{p_d}^i \cdot u_{k-p_d+1}.$$

Dla przypadku, gdy modele lokalne mają postać równań różnicowych (5.51), otrzymamy:

$$y_{k+1} = [\tilde{w}_1 \cdot (c_1^1 + \Delta c_1^1) + \tilde{w}_2 \cdot (c_1^2 + \Delta c_1^2)] \cdot \Delta u_k + \tilde{w}_1 \cdot (re_b^1 + \Delta re_b^1) + \tilde{w}_2 \cdot (re_b^2 + \Delta re_b^2), \quad (5.58)$$

gdzie tym razem składniki  $re_b^i$  i  $\Delta re_b^i$  są dane wzorami (5.59):

$$re_b^i = b_1^i \cdot y_k + b_2^i \cdot y_{k-1} + \dots + (c_1^i + c_2^i) \cdot u_{k-1} + c_3^i \cdot u_{k-2} + \dots, \quad (5.59)$$

$$\Delta re_b^i = \Delta b_1^i \cdot y_k + \Delta b_2^i \cdot y_{k-1} + \dots + (\Delta c_1^i + \Delta c_2^i) \cdot u_{k-1} + \Delta c_3^i \cdot u_{k-2} + \dots.$$

Następnie dokonuje się oszacowań i podstawień analogicznych do poprzednio wykonanych, a otrzymane nierówności wykorzystuje się do sformułowania zadania optymalizacji z ograniczeniami, powtarzanego w każdym kroku działania regulatora.



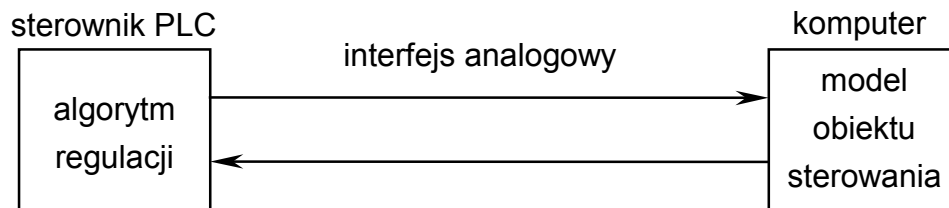
## 6. Implementacja algorytmów FDMC

Niniejszy rozdział jest krótkim omówieniem przykładów implementacji opracowanych algorytmów. Pierwszy z nich jest związany z zastosowaniem sterownika PLC. Drugi przykład to biblioteka funkcji zawarta w pakiecie oprogramowania do regulacji zaawansowanej REGZA i użyta w programie *Regulatory DMC* z tegoż pakietu.

### 6.1. Implementacja algorytmu FDMC na sterowniku logicznym PLC

Niniejszy rozdział zawiera opis przykładu wykorzystania sterownika logicznego PLC do implementacji rozmytego algorytmu predycyjnego DMC w wersji analitycznej, użytego w układzie regulacji nieliniowego obiektu z dużym opóźnieniem z przykładu 3.1 [63].

Działanie układu regulacji testowano na stanowisku badawczym, którego krótki opis został tutaj zamieszczony. Dodatkowe informacje na jego temat, jak również przykłady innych jego zastosowań można znaleźć w pracach [57, 61]. Użyte stanowisko jest złożone z dwóch elementów. Pierwszym z nich jest komputer PC z symulatorem obiektu. Maszyna ta jest połączona interfejsem analogowym z rzeczywistym urządzeniem sterującym w postaci przemysłowego sterownika programowalnego PLC (rys. 6.1). Zauważmy, że dzięki takiej konfiguracji jest możliwe przetestowanie regulatora, który został zaprogramowany w pamięci sterownika PLC, na stanowisku badawczym. Następnie, jeśli uznamy działanie tego regulatora za zadowalające, możemy podłączyć sterownik do rzeczywistego obiektu.



Rys. 6.1. Schemat stanowiska laboratoryjnego z komputerem i sterownikiem PLC



Rys. 6.2. Wygląd stanowiska laboratoryjnego: 1 – komputer PC, 2 – monitor, 3 – sterownik PLC

Podczas prowadzonych badań, obiekt regulacji był symulowany na komputerze PC klasy Pentium wyposażonym w kartę wejść/wyjść analogowych PCL-812 firmy Advantech. Urządzeniem sterującym był sterownik PLC firmy Allen-Bradley SLC-500, przy czym wykorzystano następujące jego moduły: • procesor 5/04, • moduł wejść/wyjść analogowych NIO4V oraz • moduł BASIC (rys. 6.2). Obliczenia wykonywał moduł BASIC (algorytm regulacji został napisany w Basic-u), zaś procesor pośredniczył w przekazywaniu danych pomiędzy modułem BASIC a komputerem z symulatorem obiektu regulacji.

Przypomnijmy, że w przypadku algorytmu FDMC w wersji analitycznej główne obliczenia wystarczy wykonać tylko raz (off-line), zaś w każdym kroku działania algorytmu wystarczy obliczyć, na podstawie bieżącego punktu pracy, wagi poszczególnych regulatorów lokalnych, a następnie zsumować ich współczynniki pomnożone przez te wagi. W wyniku tych działań otrzymuje się jeden zestaw współczynników regulatora (rozdz. 3.2). Regulator o takiej strukturze, uzupełniony o mechanizm rzutowania sterowań na zbiór ograniczeń, dobrano do obiektu regulacji z przykładu 3.1. Następnie zasymulowano układ regulacji na opisanym wyżej stanowisku badawczym. Otrzymano praktycznie takie same odpowiedzi, jak w przypadku symulacji przeprowadzonej na jednym komputerze (dlatego nie zostały one tutaj zamieszczone).

Istotnym zagadnieniem, a jednocześnie dużą zaletą algorytmu DMC jest możliwość uwzględniania w nim zakłócenia mierzalnego (rozdz. 2.2). Przypomnijmy, że idea tego mechanizmu polega na odpowiedniej modyfikacji odpowiedzi swobodnej obiektu regulacji. Jeśli chcemy uwzględnić w algorytmie wpływ zakłócenia, o którym mamy jakieś informacje (uzyskane na przykład dzięki zastosowaniu pomiaru pośredniego), na rozważany obiekt, to wystarczy dodać do odpowiedzi swobodnej wyrazy opisujące ten wpływ.

Algorytm regulacji poddany opisanej modyfikacji jest niestety bardziej skomplikowany, gdyż pojawiają się w nim dodatkowe parametry. Wzrost liczby parametrów może w skrajnym przypadku sprawić, że konieczne stanie się rozszerzenie pamięci użytego sterownika. Nie było to jednak konieczne w rozpatrywanym przykładzie pomimo tego, że liczba parametrów regulatora wzrosła dwukrotnie.

Drugą niedogodnością jest wydłużenie się czasu wykonania jednego kroku działania regulatora, w rozważanym przypadku było ono około dwukrotne. Może to być problemem podczas implementacji algorytmu na sterowniku logicznym. Jednak jeśli obiekt regulacji ma stosunkowo wolną dynamikę, to sterownik zdąży wykonać potrzebne obliczenia. Jedna iteracja najbardziej rozbudowanej wersji regulatora dobranego do rozważanego w artykule obiektu trwała mniej niż 3 s. Opisana modyfikacja pomimo swoich wad przynosi znaczącą korzyść, gdyż działanie regulatora może ulec zdecydowanej poprawie (zob. przykład 3.2).

Zauważmy, że chociaż do przykładowego obiektu regulacji zaprojektowano regulator FDMC w wersji analitycznej o najbardziej rozbudowanej strukturze, tzn. z uwzględnieniem zakłócenia mierzalnego i ograniczeń istniejących w układzie regulacji, to możliwe było jego zaimplementowanie na sterowniku PLC. Uzyskane wyniki były zadowalające, co świadczy o możliwości stosowania rozmytego algorytmu regulacji DMC dla obiektów nieliniowych o stosunkowo wolnej dynamice, bez konieczności użycia do tego celu komputera, który można zastąpić sterownikiem logicznym.

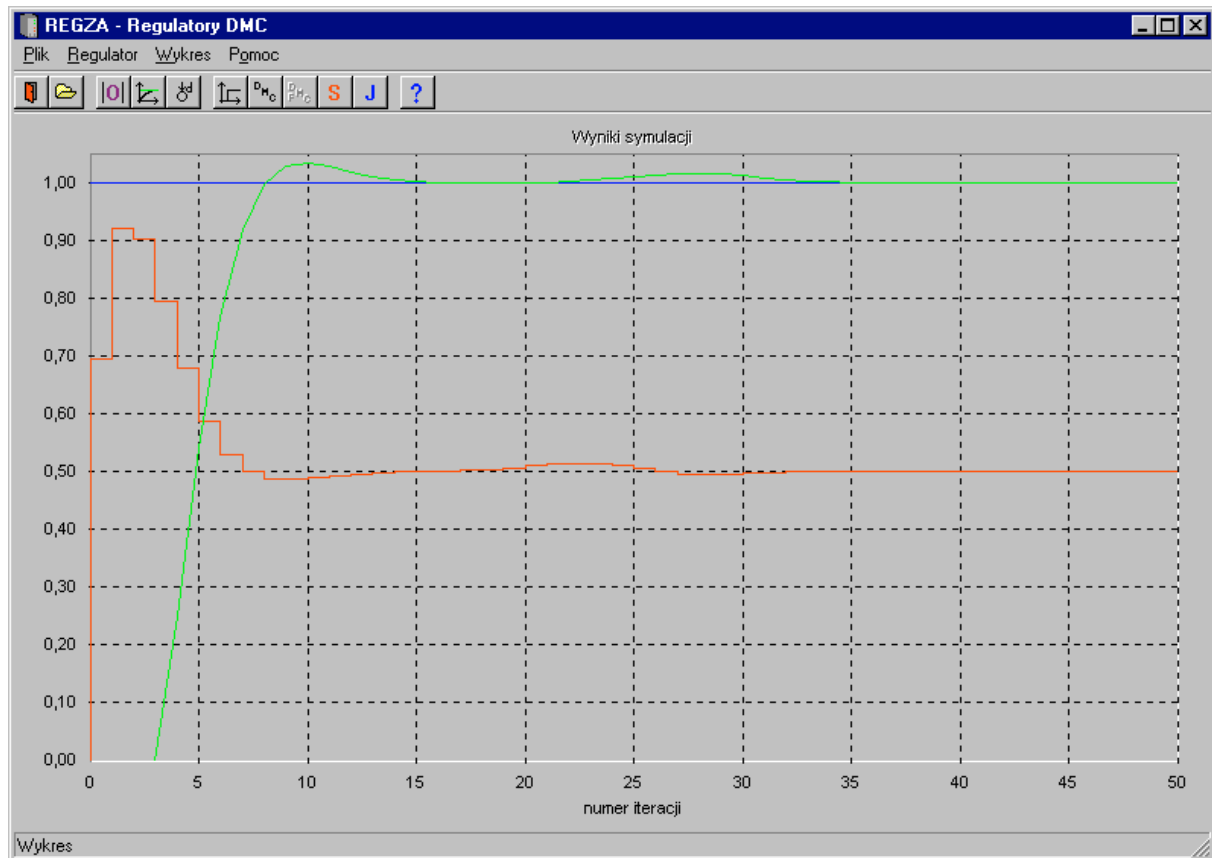
## 6.2. Biblioteka regulatorów DMC i FDMC w pakiecie REGZA

Drugim przykładem implementacji algorytmów DMC i FDMC jest biblioteka funkcji realizujących te regulatory. Biblioteka ta została napisana w języku C w celu zapewnienia jak największej jej przenośności, a wykorzystano ją w pakiecie REGZA (Regulacja Zawansowana) przeznaczonym do projektowania i testowania regulatorów. Zaprojektowane funkcje zostały użyte w programie *Regulatory DMC* z tego pakietu. Program ten oferuje użytkownikowi wygodny dostęp do możliwości oferowanych przez składniki opracowanej biblioteki.

Program wspomaga projektowanie predykcyjnych regulatorów cyfrowych, korzystając z dostarczonych współczynników odpowiedzi skokowych obiektu, bądź na podstawie modeli obiektów w postaci równań różnicowych wejście–wyjście oraz modeli rozmytych (wówczas współczynniki odpowiedzi skokowych obiektu są obliczane przez program). Dla użytkownika są dostępne algorytmy regulacji: DMC w wersji analitycznej i numerycznej oraz FDMC w wersji analitycznej, a także w wersji z powtarzaną optymalizacją w dwóch odmianach. Pierwsza odmiana wykorzystuje do predykcji odpowiedzi swobodnej, przybliżony model liniowy wyznaczany w każdym kroku pracy algorytmu, zaś druga – nieliniowy model procesu.

Opracowane funkcje umożliwiają przyjęcie przez użytkownika następujących parametrów: horyzontu predykcji, horyzontu sterowania oraz wartości współczynnika kary za przyrosty sterowania. Istnieje możliwość uwzględnienia ograniczeń wartości sterowań, w przypadku algorytmów opartych na sformułowaniu analitycznym oraz ograniczeń wartości i przyrostów sterowań, w przypadku algorytmów z optymalizacją kwadratową powtarzaną w każdym kroku działania algorytmu. Zaimplementowane funkcje można zastosować do obiektów o dowolnej wymiarowości (ograniczeniem jest jedynie pamięć komputera).

Główne okno programu *Regulatory DMC* (rys. 6.3) składa się z kilku części. Patrząc od góry są to: pasek menu rozwijalnego, za pośrednictwem którego są wybierane polecenia, pasek narzędzi z wyprowadzonymi w postaci przycisków, częściej używanymi poleceniami, okno wykresu, na którym są prezentowane wyniki symulacji prowadzonych przez użytkownika oraz pasek stanu, na którym są wyświetlane podpowiedzi dla użytkownika. Po dwukrotnym kliknięciu punktów tworzących wykres, użytkownik otrzymuje informację o tym, elementem przebiegu jakiej wielkości jest wybrany punkt, o numerze kroku działania regulatora i o wartości sygnału w danym punkcie.

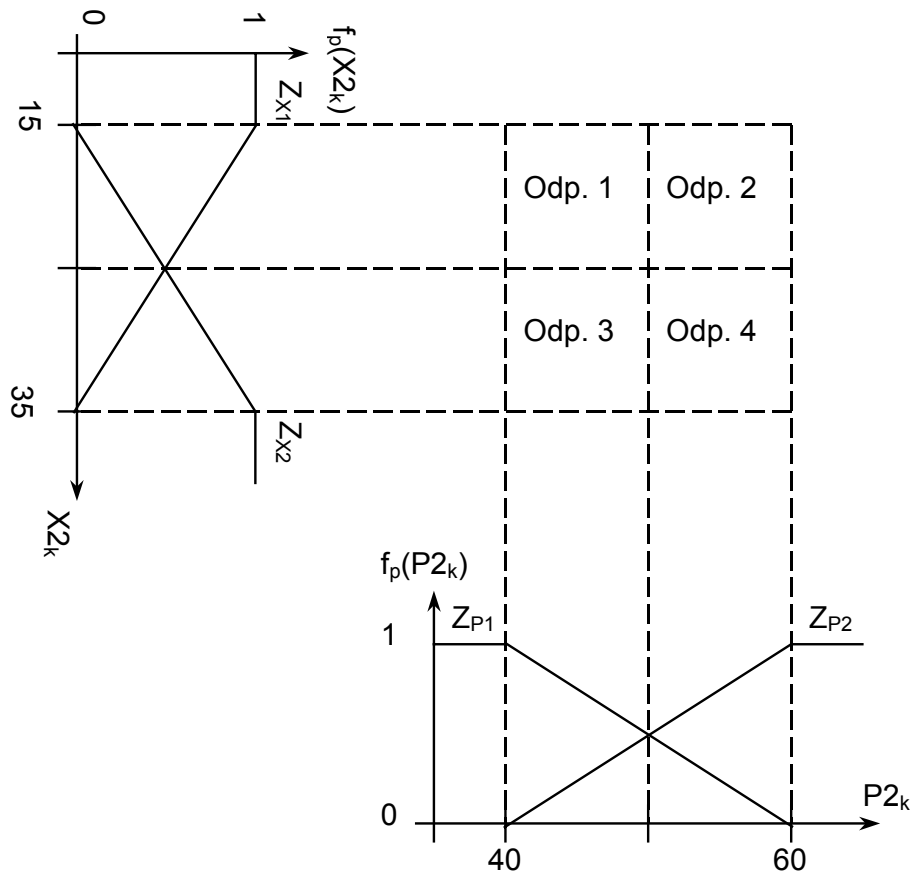


Rys. 6.3. Główne okno programu *Regulatory DMC*

Szczegółowy opis programu, jak również innych elementów pakietu REGZA można znaleźć w pracy [52]. Dokładny opis funkcji z implementacją algorytmów DMC i FDMC znajduje się w raporcie [51]. Poniżej przedstawiono przykład użycia programu, który oprócz zademonstrowania jego możliwości, prezentuje zarazem zalety regulatorów, których dotyczy niniejsza praca. Przy czym głównym celem w drugim przypadku było zademonstrowanie możliwości poprawy jakości regulacji w stosunku do przypadku z regulatorem konwencjonalnym, przy użyciu najprostszej z metod projektowania regulatora rozmytego.

### Przykład 6.1.

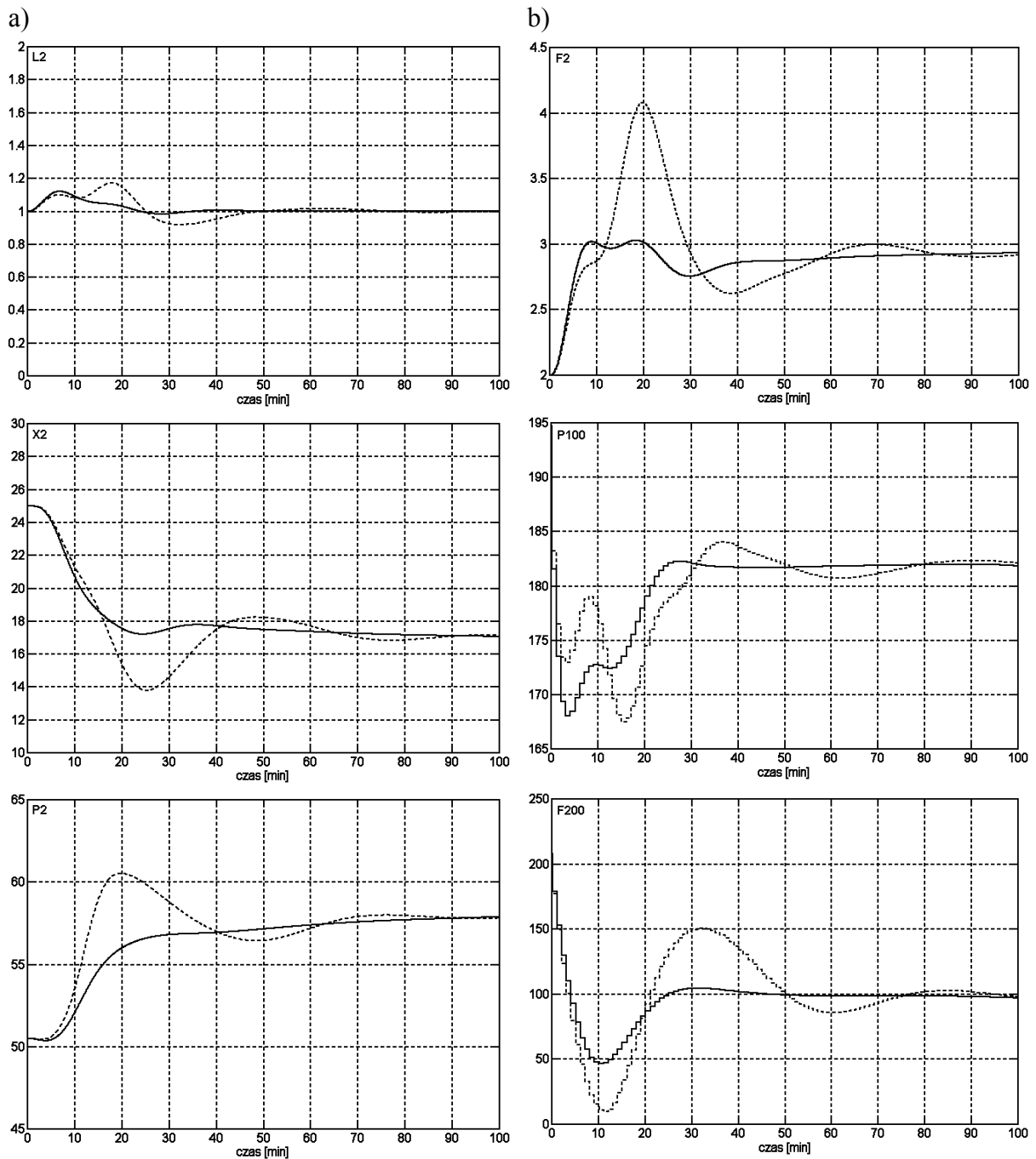
Obiektem regulacji jest wyparka opisana w [81], ze stabilizacją jednej z wielkości regulowanych regulatorem PI zaproponowanym w tej pracy. Obiekt ten był przedmiotem badań i został opisany w innych publikacjach, dlatego tutaj ograniczymy się do jego krótkiego przedstawienia. Wielkości regulowane obiektu to:  $L2$  – poziom cieczy w separatorze (przyjęto, że jest on stabilizowany wokół wartości  $L2_{zad} = 1,0$  m za pomocą regulatora PI o nastawach  $K_p = 5,6$  oraz  $T_i = 8,84$  min),  $X2$  – skład produktu,  $P2$  – ciśnienie w wyparce. Wielkości sterujące są następujące:  $F2$  – przepływ produktu (jest to wielkość używana do stabilizacji poziomu  $L2$ ),  $P100$  – ciśnienie pary,  $F200$  – przepływ wody chłodzącej. Oznaczenia przyjęto takie same, jak w [81], a ponadto tak, jak w tamtej pracy, na wejściach sterujących dodano inercje o stałych czasowych  $T_{in} = 1,2$  min.



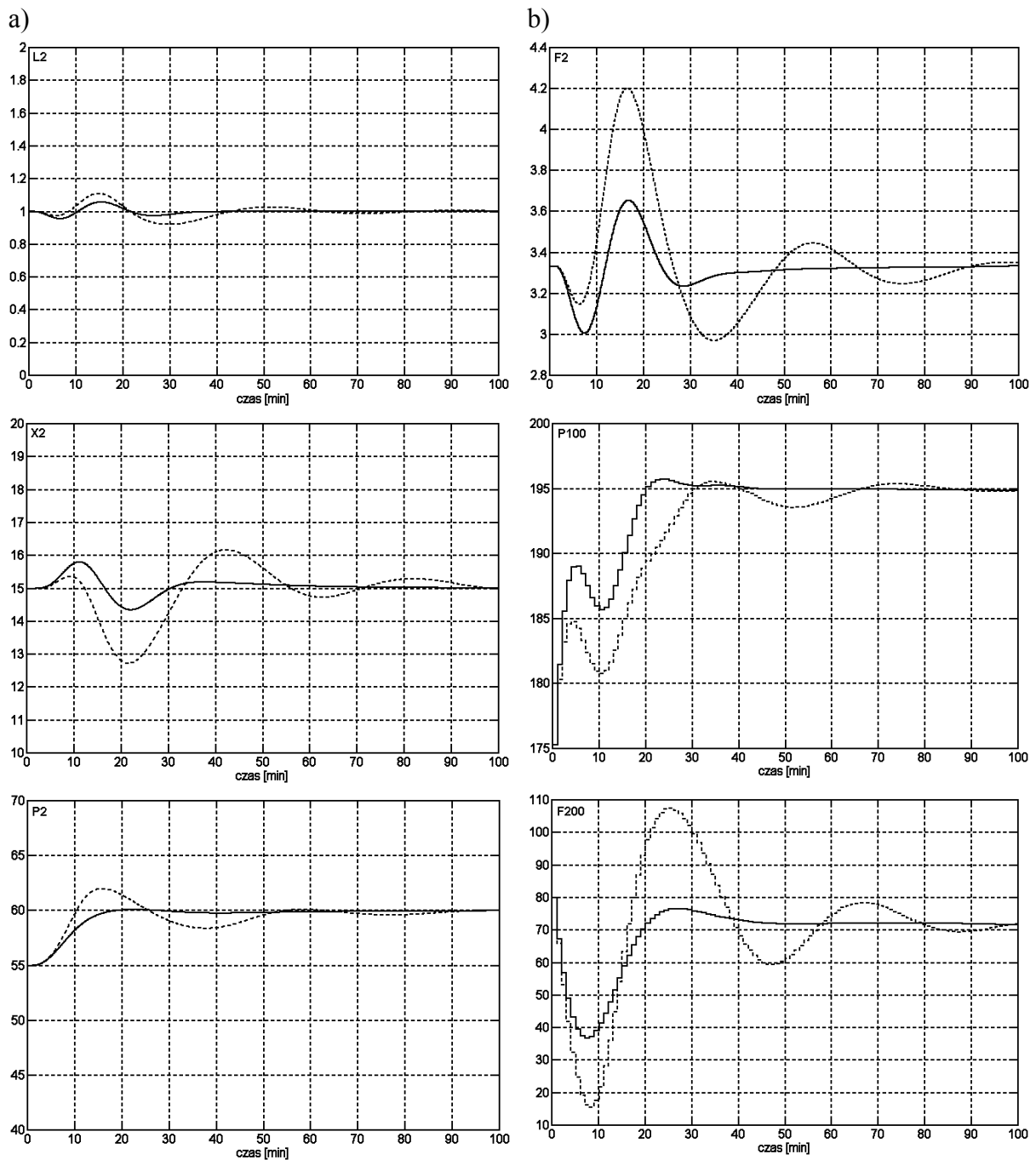
Rys. 6.4. Funkcje przynależności regulatora rozmytego

Regulator konwencjonalny DMC został zaprojektowany dla odpowiedzi z okolicy punktu równowagi  $X2 = 25\%$ ,  $P2 = 50,5$  kPa. W przypadku rozmytego regulatora DMC, odpowiedzi otrzymano z okolic czterech punktów pracy:  $X2 = 15\%$ ,  $P2 = 40$  kPa;  $X2 = 15\%$ ,  $P2 = 60$  kPa;  $X2 = 35\%$ ,  $P2 = 40$  kPa;  $X2 = 35\%$ ,  $P2 = 60$  kPa. Przyjęte funkcje przynależności są pokazane na rys. 6.4. W przypadku obu regulatorów przyjęto te same wartości parametrów dostrajalnych  $\lambda_1 = 0,1$  i  $\lambda_2 = 0,1$ .

W przypadku większości wymuszeń (skoków zakłóceń dodawanych do wyjść obiektu lub skoków wartości zadanej), odpowiedzi otrzymane w układach regulacji z regulatorem konwencjonalnym i z regulatorem rozmytym były podobne (szczególnie jeśli nie powodowały znacznego odejścia od punktu pracy  $X_2 = 25 \%$ ,  $P_2 = 50,5 \text{ kPa}$ ), a różnice były dostrzegalne głównie w przebiegach sterowań. Inna sytuacja miała miejsce dla przypadków odchodzenia od punktu, dla którego został zaprojektowany regulator konwencjonalny. W części przypadków regulator konwencjonalny działał lepiej niż regulator rozmyty, jednak różnice te nie były znaczące. Duże różnice w pracy regulatorów pojawiły się natomiast w przypadku pracy układów regulacji w okolicy punktu  $X_2 = 15 \%$ ,  $P_2 = 60 \text{ kPa}$ . Wówczas ujawniły się zalety podejścia rozmytego, co ilustrują zamieszczone poniżej przykładowe przebiegi.



Rys. 6.5. Odpowiedzi układów regulacji z regulatorami DMC (linia przerywana) i FDMC-SL (linia ciągła) na skoki wartości zadanych do  $X_{2\text{zad}} = 17 \%$  i  $P_{2\text{zad}} = 58 \text{ kPa}$ ;  
a) wyjścia od góry:  $L_2$ ,  $X_2$  i  $P_2$ , b) sterowania od góry:  $F_2$ ,  $P_{100}$  i  $F_{200}$



Rys. 6.6. Odpowiedzi układów regulacji z regulatorami DMC (linia przerywana) i FDMC-SL (linia ciągła) na skok dodanego do wyjścia  $P_2$  zakłócenia  $P_{2zak} = -5$  kPa;  
 a) wyjścia od góry:  $L_2$ ,  $X_2$  i  $P_2$ , b) sterowania od góry:  $F_2$ ,  $P_{100}$  i  $F_{200}$

Przypadek skoku wartości zadanej ciśnienia  $P_2$  w górę, przy jednoczesnym skokowym zmniejszeniu wartości zadanej składu  $X_2$  okazał się najbardziej wymagający dla regulatora konwencjonalnego i prawdopodobnie dlatego właśnie on posłużył jako przykład w pracy [53]. Przebiegi otrzymane w tej sytuacji pokazano na rys. 6.5, przy czym tak dobrano wartości zadane, aby sygnał sterowania  $F_{200}$  nie doszedł do dolnego ograniczenia  $F_{200d} = 0$  kg/min. Linia przerywaną oznaczono przebiegi uzyskane w układzie regulacji z regulatorem konwencjonalnym, zaś linią ciągłą – z regulatorem rozmytym. W przypadku regulatora konwencjonalnego występuje wyraźnie większe przeregulowanie, a ponadto większe są zmiany stero-

wań. Podobna sytuacja miała miejsce, przy skoku zakłócenia dodanego do wyjścia  $P2$  obiektu regulacji w przypadku pracy układu w okolicy punktu  $X2 = 15 \%$ ,  $P2 = 60 \text{ kPa}$  (rys. 6.6).

W przykładzie zastosowano najprostszy sposób projektowania regulatora rozmytego i jedną z prostszych jego struktur. Sposób ten polega na pozyskaniu odpowiedzi skokowych z okolic kilku punktów pracy, a następnie zastosowaniu regulatora rozmytego FDMC–SL w wersji analitycznej. Warto zauważyć, że pomimo dużej prostoty tej metody projektowania regulatora, otrzymano poprawę jakości regulacji w stosunku do regulatora konwencjonalnego.

## 7. Podsumowanie wyników pracy i wnioski

Opisane w pracy, rozmyte algorytmy predykcyjne łączą w sobie zalety regulacji predykcyjnej i modeli rozmytych typu Takagi–Sugeno. Są to algorytmy bardziej efektywne obliczeniowo w stosunku do algorytmów regulacji predykcyjnej dla problemów nieliniowych polegających na rozwiązywaniu zadania optymalizacji nieliniowej w każdym kroku algorytmu. W przeciwieństwie do tych ostatnich, zaproponowane algorytmy wymagają bowiem jedynie rozwiązywania wypukłego zadania optymalizacji kwadratowej bez ograniczeń (wersje analityczne) lub z ograniczeniami liniowymi (wersje numeryczne) w każdym kroku. Dzięki takiemu sformułowaniu, przedstawione w pracy algorytmy gwarantują otrzymanie rozwiązania zadania optymalizacji i to w przewidywalnym czasie a jednocześnie, zastosowane do regulacji procesów nieliniowych, mogą przynieść znaczną poprawę jakości regulacji w stosunku do konwencjonalnych regulatorów predykcyjnych wykorzystujących jedynie liniowy model procesu.

Istotną zaletą, czyniącą opracowane algorytmy bardziej atrakcyjnymi od innych algorytmów predykcyjnych z linearyzacją, jest szczególnie prosta metoda otrzymywania modelu liniowego, wynikająca w naturalny sposób z wnioskowania rozmytego (rozdz. 3). Zauważmy także, że to właśnie z właściwości podejścia TS wynikają zalety najprostszych z opracowanych rozmytych regulatorów predykcyjnych (rozdz. 3.2), projektowanie których polega na syntezie rozmytego regulatora z kilku lokalnych regulatorów liniowych (DMC lub wykorzystujących modele w postaci równań różnicowych). Dzięki temu, główna część obliczeń potrzebnych do wyznaczenia sterowań jest wykonywana raz (off-line), co umożliwia implementację algorytmu na stosunkowo prostym sterowniku PLC (rozdz. 6.1).

Ważną cechą wymaganą od projektowanych układów regulacji jest ich stabilność. Dlatego opracowano sposób badania stabilności układów regulacji z predykcyjnymi regulatorami rozmytymi w wersji analitycznej. Opracowano również mechanizmy zapewniania stabilności układów regulacji z rozmytymi algorytmami predykcyjnymi opartymi na rozwiązywaniu zadania optymalizacji liniowo–kwadratowej w każdym kroku działania algorytmu, polegające na wprowadzaniu dodatkowych elementów do sformułowania zadania optymalizacji. Otrzymano efektywne algorytmy przeznaczone do regulacji obiektów nieliniowych, które oferują wszystkie zalety regulacji predykcyjnej, a ponadto stabilność układu regulacji, w którym zostały użyte i jednocześnie nie wymagają rozwiązywania zadania optymalizacji nieliniowej, lecz jedynie zadania programowania liniowo–kwadratowego.

Zaproponowano również sposoby uwzględniania ograniczeń nałożonych na wartości wyjść obiektu regulacji z uwzględnieniem niepewności modelowania. Opracowano metody dotyczące uwzględniania ograniczeń nałożonych na wyjścia obiektu regulacji w warunkach niepewności modelowanej jako znane, z dokładnością do zbioru, zakłócenie dodane do wyjścia modelu obiektu regulacji oraz niepewności wynikającej z niedokładnej znajomości parametrów modelu obiektu regulacji. Problem rozwiązano, zapewniając spełnienie ograniczeń przewidywanych wartości wyjść obiektu regulacji w kolejnej chwili poprzez odpowiednie ograniczenie sterowań, wykorzystując podejście polegające na rozpatrywaniu najgorszego przypadku. Oczywiście, jakość uzyskanego rozwiązania jest tu w znacznym stopniu uzależniona od jakości modelowania niepewności. Przyjęcie zbyt dużych zakresów wartości zakłóceń czy parametrów modelu może prowadzić do braku dopuszczalnego rozwiązania lub bardzo konserwatywnych wyników.

Reasumując, w pracy zaproponowano efektywne rozmyte algorytmy predykcyjne przeznaczone do regulacji układów nieliniowych, zapewniające stabilność układów regulacji, w których zostały użyte oraz oferujące projektantowi mechanizmy poprawiania jakości regulacji wynikające z wykorzystania predykcji podczas wyznaczania sterowań (uwzględnianie ograniczeń, zakłócenia mierzalnego itp., na wiele chwil do przodu). Pozostaje jednak nadal szereg



interesujących i ważnych zagadnień, których rozważenie wykraczało poza zakres pracy. Przykładem takiego problemu jest projektowanie rozmytych algorytmów predykcyjnych, zapewniających odporną stabilność układów regulacji wykorzystujących te algorytmy.

Ciekawym zagadnieniem jest użycie zaproponowanych algorytmów do regulacji obiektów wielowymiarowych. W rozdz. 2 podano sposób formułowania takich algorytmów pokazując, że nieznacznie różni się on od sformułowania jednowymiarowego. Opracowane mechanizmy badania i zapewniania stabilności układów regulacji z rozmytymi regulatorami predykcyjnymi oraz uwzględniania ograniczeń wyjść obiektu regulacji w warunkach niepewności modelowania, można więc w prosty i naturalny sposób zastosować w przypadku wielowymiarowym. Istnieją jednak interesujące, dodatkowe możliwości oferowane przez wielowymiarowe regulatory predykcyjne i wynikające z ich struktury, jak uwzględnianie dodatkowego składnika ekonomicznego we wskaźniku jakości regulatora w przypadku dysponowania większą liczbą wejść niż wyjść, czy też możliwości zapobiegania skutkom awarii w przypadku utraty któregoś z pomiarów wartości wyjściowej lub utraty wpływu na któreś ze sterowań.

## Literatura

- [1] R. Babuška, J.M. Sousa, H.B. Verbruggen: *Predictive control of nonlinear systems based on fuzzy and neural models*; Proc. European Control Conference ECC'99, CD-ROM, Karlsruhe, Germany, 1999.
- [2] R. Babuška, J.M. Sousa, H.B. Verbruggen: *Inverse fuzzy model based predictive control*; In D. Driankov, R. Palm: *Advances in Fuzzy Control*, Springer, 1998.
- [3] R. Babuška, H.A.B. te Braake, H.J.L. van Can, A.J. Krijgsman, H.B. Verbruggen: *Comparison of intelligent control schemes for real-time pressure control*; Control Engineering Practice, vol. 4, no. 11, pp. 1585–1592, 1996.
- [4] A. Bemporad: *Reference governor for constrained nonlinear systems*; IEEE Trans. on Automatic Control, vol. 43, no. 3, pp. 415–419, 1998.
- [5] A. Bemporad: *A predictive controller with artificial Lyapunov function for linear systems with input/state constraints*; Automatica, vol. 34, no. 10, pp. 1255–1260, 1998.
- [6] A. Bemporad, A. Casavola, E. Mosca: *Nonlinear control of constrained linear systems via predictive reference management*; IEEE Trans. on Automatic Control, vol. 42, no. 3, pp. 340–349, 1997.
- [7] A. Bemporad, L. Chisci, E. Mosca: *On the stabilizing property of SIORHC*; Automatica, vol. 30, no. 12, pp. 2013–2015, 1994.
- [8] A. Bemporad, A. Garulli: *Output-Feedback Predictive Control of Constrained Linear Systems via Set-Membership State Estimation*; Int. J. Control, vol. 73, no. 8, 2000.
- [9] A. Bemporad, E. Mosca: *Fulfilling hard constraints in uncertain linear systems by reference managing*; Automatica, vol. 34, no. 4, 1998.
- [10] D.D. Brengel, W.D. Seider: *Multistep nonlinear predictive control*; Ind. Eng. Chem. Res., vol. 28, pp. 1812–1822, 1989.
- [11] C.B. Brosilow, M. Tong: *Inferential control of processes: Part II The structure and dynamics of inferential control systems*; AIChE Journal, vol. 24, no. 3, pp. 492–500, 1978.
- [12] S.G. Cao, N.W. Rees, G. Feng: *Stability analysis of fuzzy control systems*; IEEE Trans. on Systems, Man and Cybernetics – Part B, vol. 26, no. 1, pp. 201–204, 1996.
- [13] E.F. Camacho, C. Bordons: *Model Predictive Control in the process industry*; Springer, 1995.
- [14] E.F. Camacho, C. Bordons: *Model Predictive Control*; Springer, 1999.
- [15] H. Chen, F. Algöwer: *A quasi-infinite horizon nonlinear model predictive control scheme with guaranteed stability*; Automatica, vol. 34, no. 10, pp. 1205–1217, 1998.
- [16] C.C. Chen, L. Shaw: *On receding horizon feedback control*; Automatica, vol. 18, no. 3, pp. 349–352, 1982.
- [17] C.M. Cheng, N.W. Rees, S.G. Cao, G. Feng: *Control design of nonlinear systems using fuzzy model and genetic algorithm*; Proc. 13<sup>th</sup> IFAC Triennial World Congress, San Francisco, USA, 1996.
- [18] L. Chisci, E. Mosca: *Stabilizing I–O receding horizon control of CARMA plants*; IEEE Trans. on Automatic Control, vol. 39, no. 3, pp. 614–618, 1994.
- [19] D.W. Clarke, C. Mohtadi, P.S. Tuffs: *Generalized Predictive Control – Part I. The basic algorithm*; Automatica, vol. 23, no. 2, pp. 137–148, 1987.
- [20] D.W. Clarke, C. Mohtadi, P.S. Tuffs: *Generalized Predictive Control – Part II. Extensions and interpretations*; Automatica, vol. 23, no. 2, pp. 149–160, 1987.

- [21] D.W. Clarke, C. Mohtadi: *Properties of Generalized Predictive Control*; Automatica, vol. 25, no. 6, pp. 859–875, 1989.
- [22] D.W. Clarke, R. Scattolini: *Constrained receding–horizon predictive control*; IEE Proc.–D, vol. 138, no. 4, pp. 347–354, 1991.
- [23] C.R. Cutler, B.L. Ramaker: *Dynamic Matrix Control – a computer control algorithm*; Proc. Joint American Control Conference, San Francisco, USA, 1980.
- [24] S.L. de Oliveira, M. Morari: *Contractive model predictive control for constrained nonlinear systems*; IEEE Trans. on Automatic Control, vol. 45, no.6, pp. 1053–1071, 2000.
- [25] M. Demircan, M.C. Çamurdan, B.E. Postlethwaite: *On–line learning fuzzy relational model based dynamic matrix control of an open loop unstable process*; Trans. IChemE, vol. 77, Part A, pp. 421–428, 1999.
- [26] P.D. Domański, M.A. Brdyś, P. Tatjewski: *Design and stability of fuzzy logic multi–regional output controllers*; Proc. European Control Conference ECC'97, CD–ROM, Brussels, Belgium, 1997.
- [27] D. Driankov, H. Hallendoorn, M. Reinfrank: *Wprowadzenie do sterowania rozmytego*; Wydawnictwa Naukowo–Techniczne, Warszawa 1996.
- [28] A. Fink, M. Fischer, O. Nelles, R. Isermann: *Supervision of nonlinear adaptive controllers based on fuzzy models*; Control Engineering Practice, vol. 8, pp. 1093–1105, 2000.
- [29] M. Fischer, O. Nelles, R. Isermann: *Adaptive predictive control of a heat exchanger based on a fuzzy model*; Control Engineering Practice, vol. 6, pp. 259–269, 1998.
- [30] B.A. Foss, T.A. Johansen, A.V. Sorensen: *Nonlinear predictive control using local models–applied to a batch fermentation process*; Control Engineering Practice, vol. 3, no. 3, pp. 389–396, 1995.
- [31] C.E. Garcia: *Quadratic Dynamic Matrix Control of nonlinear processes: an application to a batch reaction process*; In AIChE Annual Meeting, San Francisco, USA, 1984.
- [32] C.E. Garcia, A.M. Morshedi: *Quadratic programming solution of Dynamic Matrix Control (QDMC)*; Chem. Eng. Comm., vol. 46, pp. 73–78, 1986.
- [33] G. Gattu, E. Zafiriou: *Nonlinear Quadratic Dynamic Matrix Control with state estimation*; Ind. Eng. Chem. Res., vol. 31, pp. 1096–1104, 1992.
- [34] H. Genceli, M. Nikolaou: *Robust stability analysis of constrained  $l_1$ –norm model predictive control*; AIChE Journal, vol. 39, no. 12, pp. 1954–1965, 1993.
- [35] H. Genceli, M. Nikolaou: *Design of robust constrained model–predictive controllers with Volterra series*; AIChE Journal, vol. 41, no. 9, pp. 2098–2107, 1995.
- [36] H. Hellendoorn, D. Driankov: *Fuzzy model identification: selected approaches*; Springer, 1997.
- [37] Z. Huaguang, H. Xiqin, M. Xiangping, Z. Bien: *Multivariable FGPC Controller and its performance analysis*; Proc. 14<sup>th</sup> IFAC Triennial World Congress, Beijing, China, 1999.
- [38] B. Joseph, C.B. Brosilow: *Inferential control of processes: Part I Steady state analysis and design*; AIChE Journal, vol. 24, no. 3, pp. 485–492, 1978.
- [39] B. Joseph, C.B. Brosilow: *Inferential control of processes: Part III Construction of optimal and suboptimal dynamic estimators*; AIChE Journal, vol. 24, no. 3, pp. 500–509, 1978.
- [40] J. Joh, Y.H. Chen, R. Langari: *On the stability issues of linear Takagi–Sugeno fuzzy models*; IEEE Trans. on Fuzzy Systems, vol. 6, no. 3, pp. 402–410, 1998.

- [41] S.S. Keerthi, E.G. Gilbert: *Optimal infinite-horizon feedback laws for a general class of constrained discrete-time systems: stability and moving-horizon approximations*; J. Optim. Theory Appl., vol. 57, no. 2, pp. 265–293, 1988.
- [42] D.L. Kleinman: *An easy way to stabilize a linear system*; IEEE Trans. on Automatic Control, vol. 15, s. 692, 1970.
- [43] D.L. Kleinman: *Stabilizing a discrete, constant, linear system with application to iterative methods for solving the Riccati equation*; IEEE Trans. on Automatic Control, vol. 19, pp. 252–254, 1974.
- [44] W.H. Kwon, A.E. Pearson: *On the stabilization of a discrete constant linear system*; IEEE Trans. on Automatic Control, vol. 20, pp. 800–801, 1975.
- [45] W.H. Kwon, A.E. Pearson: *A modified quadratic cost problem and feedback stabilization of a linear system*; IEEE Trans. on Automatic Control, vol. 22, no. 5, pp. 838–842, 1977.
- [46] W.H. Kwon, A.E. Pearson: *On feedback stabilization of time-varying discrete linear systems*; IEEE Trans. on Automatic Control, vol. 23, no. 3, pp. 479–481, 1978.
- [47] N.M. Lakshmanan, Y. Arkun: *Estimation and model predictive control of non-linear batch processes using linear parameter varying models*; Int. J. Control, vol. 72, pp. 659–675, 1999.
- [48] J.W. Lee, W.H. Kwon, J. Choi: *On stability of constrained receding horizon control with finite terminal matrix*; Automatica, vol. 34, no. 12, pp. 1607–1612, 1998.
- [49] J.H. Lee, N.L. Ricker: *Extended Kalman filter based nonlinear model predictive control*; Ind. Eng. Chem. Res., vol. 33, pp. 1530–1541, 1994.
- [50] W.C. Li, L.T. Biegler: *Multistep, Newton-type control strategies for constrained, nonlinear processes*; Chem. Eng. Res. Des., vol. 67, pp. 562–577, 1989.
- [51] M. Ławryńczuk, P. Marusak: *REGZA – pakiet oprogramowania do projektowania układów regulacji zaawansowanej – instrukcja użytkownika (wersja 1.0)*; Raport IAiIS PW nr 00–11, Warszawa, czerwiec 2000.
- [52] M. Ławryńczuk, P. Marusak: *REGZA – pakiet oprogramowania do projektowania układów regulacji zaawansowanej – instrukcja użytkownika (wersja 2.0)*; Raport IAiIS PW nr 01–14, Warszawa, czerwiec 2001.
- [53] J.M. Maciejowski: *Predictive Control with constraints*; Prentice Hall 2002.
- [54] L. Magni, G. de Nicolao, L. Magnani, R. Scattolini: *A stabilizing model-based control algorithm for nonlinear systems*; Automatica, vol. 37, pp. 1351–1362, 2001.
- [55] L. Magni, G. de Nicolao, R. Scattolini: *Output feedback and tracking of nonlinear systems with model predictive control*; Automatica, vol. 37, pp. 1601–1607, 2001.
- [56] M. Mahfouf, D.A. Linkens, M.F. Abbod: *Adaptive fuzzy TSK model-based predictive control using a CARIMA model structure*; Trans IChemE, Vol. 78, Part A, May 2000.
- [57] P. Marusak: *System wspomagania projektowania i badania algorytmów regulacji ze sterownikami PLC i symulatorami obiektów*; X Konferencja Symulacja Procesów Dynamicznych SPD–10, str. 259–266, Zakopane–Kościelisko, 1998.
- [58] P. Marusak: *Środowisko aplikacyjne FIX Dynamics z implementacją algorytmu DMC*; Raport IAiIS PW nr 99–04, Warszawa, 1999.
- [59] P. Marusak: *Algorytm regulacji DMC jako zadanie optymalizacji kwadratowej – opis i implementacja*; Raport IAiIS PW nr 99–32, Warszawa, maj 1999.
- [60] P. Marusak: *Rozmyte algorytmy regulacji typu DMC dla obiektów nieliniowych*; Raport IAiIS PW nr 99–33, Warszawa, maj 1999.

- [61] P. Marusak: *Zastosowanie systemu wspomaganie projektowania algorytmów regulacji do testowania regulatorów nieliniowych*; Konferencja Naukowo–Techniczna Automation 2000, str. 63–70, Warszawa, 2000.
- [62] P. Marusak: *Algorytm regulacji DMC z uwzględnieniem ograniczeń nałożonych na wartości wyjść obiektu regulacji*; Raport IAIIS PW nr 00–05, Warszawa, kwiecień 2000.
- [63] P. Marusak: *Implementacja rozmytego algorytmu DMC z ograniczeniami na sterowniku PLC*; Konferencja Naukowo–Techniczna Automation 2001, str. 384–391, Warszawa, 2001.
- [64] P. Marusak: *Uwzględnianie ograniczeń wyjść obiektu regulacji w konwencjonalnych i rozmytych regulatorach DMC, w warunkach niepewności*; Raport IAIIS PW nr 01–03, Warszawa, maj 2001.
- [65] P. Marusak, J. Pułaczewski: *Szczególne zalety algorytmu regulacji Dynamic Matrix Control (DMC)*; Pomiar Automatyka Kontrola 12’99, str. 39–43.
- [66] P. Marusak, J. Pułaczewski, P. Tatjewski: *Algorytmy regulacji DMC z uwzględnieniem ograniczeń sterowania*; XIII Krajowa Konferencja Automatyki KKA’99, str. 113–118, Opole, 1999.
- [67] P. Marusak, P. Tatjewski: *Fuzzy Dynamic Matrix Control algorithms for nonlinear plants*; Proc. 6<sup>th</sup> International Conference on Methods and Models in Automation and Robotics MMAR 2000, pp. 749–754, Międzyzdroje, Poland, 2000.
- [68] P. Marusak, P. Tatjewski: *Output constraints in fuzzy DMC algorithms with parametric uncertainty in process models*; Proc. 7<sup>th</sup> International Conference on Methods and Models in Automation and Robotics MMAR 2001, pp. 517–522, Międzyzdroje, Poland, 2001.
- [69] P. Marusak, P. Tatjewski: *Stability analysis of nonlinear control systems with fuzzy DMC controllers*; Proc. IFAC Workshop on Advanced Fuzzy and Neural Control AFNC’01, pp. 21–26, Valencia, Spain, 2001.
- [70] D.Q. Mayne, H. Michalska: *Receding horizon control of nonlinear systems*; IEEE Trans. on Automatic Control, vol. 35, no. 7, pp. 814–824, 1990.
- [71] D.Q. Mayne, J.B. Rawlings, C.V. Rao, P.O. Scokaert: *Constrained model predictive control: stability and optimality*; Automatica, vol. 36, pp. 789–814, 2000.
- [72] E.S. Meadows, J.B. Rawlings: *Receding horizon control with an infinite horizon*; Proc. American Control Conference, pp. 2926–2930, San Francisco, USA, 1993.
- [73] D. Megias, J. Serrano, M.Y. El Ghoumari: *Extended linearized predictive control: practical control algorithms for non-linear systems*; Proc. European Control Conference ECC’99, CD-ROM, Karlsruhe, Germany, 1999.
- [74] H. Michalska, D.Q. Mayne: *Robust receding horizon control of constrained nonlinear systems*; IEEE Trans. on Automatic Control, vol. 38, pp. 1623–1632, 1993.
- [75] M. Morari, J.H. Lee: *Model predictive control: past, present and future*; Computers and Chemical Engineering, vol. 23, pp. 667–682, 1999.
- [76] E. Mosca, J. Zhang: *Stable redesign of predictive control*; Automatica, vol. 28, no. 6, pp. 1229–1233, 1992.
- [77] K.R. Muske, J.B. Rawlings: *Implementation of a stabilizing constrained receding horizon regulator*; Proc. American Control Conference, pp. 1594–1595, USA, 1992.
- [78] K.R. Muske, J.B. Rawlings: *Model Predictive Control with linear models*; AIChE Journal, vol. 39, no. 2, pp. 262–287, 1993.
- [79] R.K. Mutha, W.R. Cluett, A. Penlidis: *Nonlinear Model-Based Predictive Control of control nonaffine systems*; Automatica, vol. 33, no. 5, pp. 907–913, 1997.

- [80] R.K. Mutha, W.R. Cluett, A. Penlidis: *Modifying the prediction equation for nonlinear Model-Based Predictive Control*; Automatica, vol. 34, no. 10, pp. 1283–1287, 1998.
- [81] R.B. Newell, P.L. Lee: *Applied process control – a case study*; Prentice Hall, 1989.
- [82] H.T. Nguyen, M. Sugeno, R. Tong, R.R. Yager: *Theoretical aspects of fuzzy control*; Wiley, 1995.
- [83] L. Özkan, M.C. Çamurdan: *Model predictive control of a nonlinear unstable process*; Computers and Chemical Engineering, vol. 22, Supplement, pp. S883–S886, 1998.
- [84] T. Peterson, E. Hernandez, Y. Arkun, F.J. Schork: *A nonlinear DMC algorithm and its application to a semibatch polymerization reactor*; Chemical Engineering Science, vol. 47 no. 4, pp. 737–753, 1992.
- [85] A. Piegat: *Modelowanie i sterowanie rozmyte*; Akademicka Oficyna Wydawnicza EXIT, Warszawa, 1999.
- [86] E. Polak, T.H. Yang: *Moving horizon control of linear systems with input saturation and plant uncertainty – Part 1: Robustness*; Int. Journal of Control, vol. 58 no. 3, pp. 613–638, 1993.
- [87] E. Polak, T.H. Yang: *Moving horizon control of linear systems with input saturation and plant uncertainty – Part 2: Disturbance rejection and tracking*; Int. Journal of Control, vol. 58 no. 3, pp. 639–663, 1993.
- [88] D.M. Prett, R.D. Gillette: *Optimization and constrained multivariable control of a catalytic cracking unit*; Proc. Joint American Control Conference, San Francisco, USA, 1980.
- [89] J. Pułaczewski: *Algorytm DMC (Dynamic Matrix Control) dla niestabilnych obiektów nieliniowych*; Raport IAiS PW nr 98–01, Warszawa, grudzień 1997.
- [90] J. Pułaczewski: *Algorytm regulacji DMC. Przypadek obiektu z opóźnieniem o jednym wejściu i jednym wyjściu z pomiarem i predykcją zakłóceń*; Raport IAiS PW nr 98–06, Warszawa, 1998.
- [91] J. Pułaczewski: *Wielowymiarowy algorytm DMC*; Raport IAiS PW nr 98–11, Warszawa, 1998.
- [92] J.B. Rawlings, K.R. Muske: *The stability of constrained receding horizon control*; IEEE Trans. on Automatic Control, vol. 38, no. 10, pp. 1512–1516, 1993.
- [93] J. Richalet, A. Rault, J.L. Testud, J. Papon: *Model Predictive Heuristic Control: applications to industrial processes*; Automatica, vol. 14, pp. 413–428, 1978.
- [94] R. Scattolini, S. Bittanti: *On the choice of the horizon in long-range predictive control – some simple criteria*; Automatica, vol. 26, no. 5, pp. 915–917, 1990.
- [95] P.O. Scokaert: *Infinite horizon generalized predictive control*; Int. Journal of Control, vol. 66, no. 1, pp. 161–175, 1997.
- [96] P.O. Scokaert, D.W. Clarke: *Stabilizing properties of constrained predictive control*; IEE Proc. – Control Theory Appl., vol. 141, no. 5, pp. 295–304, 1994.
- [97] P.O. Scokaert, D.Q. Mayne, J.B. Rawlings: *Suboptimal Model Predictive Control (feasibility implies stability)*; IEEE Trans. on Automatic Control, vol. 44, no. 3, pp. 648–654, 1999.
- [98] I. Škrjanc, K. Kavšek–Biasizzo, D. Matko: *Predictive Control Based on a Fuzzy Model*; In D. Driankov, R. Palm: *Advances in Fuzzy Control*, Springer, 1998.
- [99] T. Takagi, M. Sugeno: *Fuzzy identification of systems and its application to modeling and control*; IEEE Trans. on Systems, Man and Cybernetics, vol. 15, pp. 116–132, 1985.

- [100] K. Tanaka, T. Ikeda, H.O. Wang: *Fuzzy regulators and fuzzy observers: relaxed stability conditions and LMI-based designs*; IEEE Trans. on Fuzzy Systems, vol. 6, no. 2, pp. 250–265, 1998.
- [101] K. Tanaka, M. Sugeno: *Stability analysis and design of fuzzy control systems*; Fuzzy Sets and Systems 45, pp. 135–156, 1992.
- [102] P. Tatjewski: *Sterowanie zaawansowane obiektów przemysłowych. Struktury i algorytmy*; Akademicka Oficyna Wydawnicza EXIT, Warszawa, 2002.
- [103] J. Vada, O. Slupphaug, T.A. Johansen, B.A. Foss: *Linear MPC with optimal prioritized infeasibility handling: application, computational issues and stability*; Automatica, vol. 37, pp. 1835–1843, 2001.
- [104] P.J. van der Veen, R. Babuška, H.B. Verbruggen: *Comparison of nonlinear predictive control methods for a waste–water treatment benchmark*; Proc. European Control Conference ECC'99, CD-ROM, Karlsruhe, Germany, 1999.
- [105] P. Vuthandam, H. Genceli, M. Nikolaou: *Performance bounds for robust quadratic dynamic matrix control with end condition*; AIChE Journal, vol. 41, no. 9, pp. 2083–2097, 1995.
- [106] H.O. Wang, K. Tanaka, M.F. Griffin: *An approach to fuzzy control of nonlinear systems: stability and design issues*; IEEE Trans. on Fuzzy Systems, vol. 4, no. 1, pp. 14–23, 1996.
- [107] R.R. Yager, D.P. Filev: *Podstawy modelowania i sterowania rozmytego*; Wydawnictwa Naukowo–Techniczne, Warszawa, 1995.
- [108] T.H. Yang, E. Polak: *Moving horizon control of nonlinear systems with input saturation and plant uncertainty*; Int. Journal of Control, vol. 58 no. 4, pp. 875–903, 1993.
- [109] A. Zheng, M. Morari: *Stability of model predictive control with mixed constraints*; IEEE Trans. on Automatic Control, vol. 40, no. 10, pp. 1818–1823, 1995.
- [110] J. Zhao, V. Wertz, R. Gorez: *Design a stabilizing fuzzy and/or non–fuzzy state–feedback controller using LMI method*; Proc. 3<sup>rd</sup> European Control Conference, Italy, 1995.
- [111] J. Zhao, V. Wertz, R. Gorez: *Dynamic fuzzy state–feedback controller and its limitations*; Proc. 13<sup>th</sup> IFAC Triennial World Congress, San Francisco, USA, 1996.

**Dodatek: Próbki z fizykochemicznego modelu statyki kolumny etylenowej**

$x_f=0,8011$		$x_f=0,8029$		$x_f=0,8047$		$x_f=0,8064$		$x_f=0,8082$		$x_f=0,8100$	
$u$	$z$	$u$	$z$	$u$	$z$	$u$	$z$	$u$	$z$	$u$	$z$
4,3675	49,5000	4,3721	49,6000	4,3767	49,6000	4,3813	49,6000	4,3860	49,7000	4,3906	49,7000
4,3500	54,6000	4,3546	54,7000	4,3593	54,7000	4,3640	54,7000	4,3686	54,8000	4,3733	54,8000
4,3343	59,7000	4,3390	59,7000	4,3437	59,8000	4,3484	59,8000	4,3531	59,8000	4,3578	59,8000
4,3071	69,8000	4,3119	69,9000	4,3167	69,9000	4,3214	69,9000	4,3262	69,9000	4,3311	69,9000
4,2843	79,9000	4,2891	79,9000	4,2939	79,9000	4,2988	79,9000	4,3036	79,9000	4,3085	79,9000
4,2557	95,0000	4,2606	95,0000	4,2655	95,0000	4,2704	94,9000	4,2754	94,9000	4,2803	94,9000
4,2321	109,9000	4,2371	109,9000	4,2420	109,9000	4,2470	109,9000	4,2519	109,9000	4,2569	109,9000
4,2119	124,9000	4,2169	124,9000	4,2219	124,9000	4,2269	124,9000	4,2319	124,9000	4,2370	124,9000
4,1839	150,0000	4,1890	149,9000	4,1941	149,9000	4,1992	149,9000	4,2043	149,9000	4,2094	149,9000
4,1653	169,9000	4,1704	169,9000	4,1755	169,9000	4,1807	169,9000	4,1858	169,9000	4,1910	169,9000
4,1417	199,8000	4,1469	199,8000	4,1521	199,8000	4,1573	199,8000	4,1625	199,8000	4,1678	199,8000
4,1221	229,7000	4,1273	229,7000	4,1326	229,7000	4,1378	229,8000	4,1431	229,8000	4,1484	229,9000
4,1106	249,6000	4,1159	249,7000	4,1211	249,7000	4,1264	249,8000	4,1317	249,8000	4,1370	250,0000
4,1001	269,6000	4,1054	269,7000	4,1108	269,7000	4,1161	269,8000	4,1214	269,9000	4,1267	270,1000
4,0861	299,6000	4,0914	299,7000	4,0968	299,8000	4,1022	300,0000	4,1075	300,2000	4,1129	300,4000
4,0736	329,6000	4,0790	329,8000	4,0844	330,0000	4,0898	330,3000	4,0952	330,5000	4,1006	330,9000
4,0624	359,8000	4,0678	360,1000	4,0733	360,4000	4,0787	360,7000	4,0841	361,1000	4,0896	361,6000
4,0523	390,0000	4,0577	390,4000	4,0632	390,8000	4,0687	391,3000	4,0741	391,8000	4,0796	392,5000
4,0431	420,4000	4,0485	420,9000	4,0540	421,5000	4,0595	422,1000	4,0650	422,7000	4,0705	423,6000
4,0346	450,9000	4,0401	451,6000	4,0456	452,3000	4,0511	453,0000	4,0566	453,9000	4,0621	454,9000

$x_f=0,8118$		$x_f=0,8136$		$x_f=0,8153$		$x_f=0,8171$		$x_f=0,8189$	
$u$	$z$	$u$	$z$	$u$	$z$	$u$	$z$	$u$	$z$
4,3953	49,7000	4,4000	49,8000	4,4047	49,8000	4,4094	49,8000	4,4141	49,8000
4,3781	54,8000	4,3828	54,8000	4,3875	54,8000	4,3923	54,9000	4,3971	54,9000
4,3626	59,9000	4,3674	59,9000	4,3722	59,9000	4,3770	59,9000	4,3818	59,9000
4,3359	69,9000	4,3407	69,9000	4,3456	69,9000	4,3505	69,9000	4,3553	69,9000
4,3134	79,9000	4,3183	79,9000	4,3232	79,9000	4,3281	79,9000	4,3331	79,9000
4,2853	94,9000	4,2903	94,9000	4,2952	94,9000	4,3002	94,9000	4,3052	94,9000
4,2619	109,9000	4,2669	109,9000	4,2719	109,9000	4,2769	109,9000	4,2820	109,9000
4,2420	124,9000	4,2471	124,9000	4,2521	124,9000	4,2572	124,9000	4,2623	124,9000
4,2145	149,9000	4,2196	149,9000	4,2248	149,9000	4,2299	149,9000	4,2351	149,9000
4,1962	169,9000	4,2013	169,9000	4,2065	169,9000	4,2118	169,9000	4,2170	169,9000
4,1730	199,9000	4,1783	199,9000	4,1835	199,9000	4,1888	200,0000	4,1941	200,0000
4,1537	229,9000	4,1590	230,0000	4,1643	230,1000	4,1696	230,2000	4,1750	230,3000
4,1424	250,0000	4,1477	250,1000	4,1531	250,3000	4,1584	250,4000	4,1638	250,6000
4,1321	270,2000	4,1375	270,4000	4,1429	270,6000	4,1483	270,8000	4,1537	271,0000
4,1183	300,6000	4,1237	300,9000	4,1291	301,2000	4,1346	301,5000	4,1400	301,8000
4,1061	331,2000	4,1115	331,6000	4,1170	332,0000	4,1224	332,4000	4,1279	332,9000
4,0951	362,0000	4,1005	362,5000	4,1060	363,1000	4,1115	363,7000	4,1170	364,3000
4,0851	393,0000	4,0906	393,7000	4,0961	394,4000	4,1016	395,2000	4,1072	396,1000
4,0760	424,2000	4,0815	425,1000	4,0871	426,1000	4,0926	427,1000	4,0982	428,1000
4,0677	455,7000	4,0732	456,8000	4,0788	458,0000	4,0843	459,2000	4,0899	460,6000