

Siec jest grafem. Nie jest żadnym szczególnym rodzajem grafu, bo do jej opisu używa się takiego samego aparatu matematycznego, a charakteryzuje za pomocą tych samych pojęć. Skąd zatem potrzeba dualizmu postrzegania tej samej konstrukcji? Zacznijmy od analogii: fizyczny opis człowieka jest uniwersalny – tułów, głowa, członki itd. Dodajmy jeszcze pojęcia bardziej złożone: wysokość, waga, zwinność, szybkość. Jednak w zupełnie innym kontekście będzie się nimi posługiwał pracodawca, a w innym – pediatra lub dietetyk. Dla tego pierwszego „parametry” pracownika są istniejące, zastane; są one użyteczne do określenia rodzaju czynności, które może on wykonywać, oraz przewidywanej efektywności pracy. Dotyczą zatem *wykorzystania* osoby do osiągnięcia własnych celów. Dla tych ostatnich człowiek jest fenomenem samym w sobie, tworzącym razem z własnym otoczeniem środowisko determinujące jego rozwój, a w szczególności ewolucję wartości owych parametrów fizycznych.

Nazywając graf – siecią, wierzchołki – węzłami, a krawędzie – łączami lub powiązaniem, przechodzimy od przedmiotowego do podmiotowego postrzegania tej struktury. Stajemy się lekarzem (dietetykiem) skupionym na interakcjach pomiędzy węzłami oraz ewolucji sieci będącej ich skutkiem. Interesujemy się obciążeniem węzła kolejowego, informacjami posiadanymi przez członka klubu karate, ciśnieniem w przepompowni sieci wodociągowej czy siłą oddziaływania społecznego celebryty – słowem – *stanem* węzłów sieci. Aktualny stan sieci, będący złożeniem stanów wszystkich węzłów, determinuje dalszą ewolucję sieci wskutek współzależności sąsiadujących węzłów, ale również wskutek zmian samej struktury, tj. powstawania i rozpadu łącz.

Wizje: przedmiotowa (grafu) i podmiotowa (sieci), współistnieją. Spontanicznie powstałe sieci są wtórnie i przedmiotowo wykorzystywane do realizacji partykularnych celów, np. przemyślanych kampanii marketingowych, dystrybucji złośliwego oprogramowania lub skoordynowanych kontroli skarbowych. I odwrotnie, wierzchołek grafu pełniący początkowo funkcję służebną, tj. funkcjonujący na potrzeby i pod dyktando

„przepliwów” w grafie, może urosnąć do roli centrum – autorytetu silnie oddziałującego na otoczenie¹.

Samo założenie, że węzeł ma stan i wchodzi w interakcje z sąsiadami, nie oznacza, że każda sieć jest złożona. W taki właśnie sposób modeluje się domową sieć wodociągową, układ elektroniczny dzwonka do drzwi czy obieg dokumentów w małej firmie, czyli systemy powszechnie uznane za nieskomplikowane. To, co przesądza o *złożoności sieci*, to skomplikowana sieć powiązań, daleka od regularności, ale też nie do końca losowa. Innymi słowy, zajmujemy się tu siecią powstałą w wyniku autonomicznej aktywności jej węzłów lub wyrafinowanego procesu projektowania. Poznajmy główne cechy sieci powstałych w taki właśnie sposób.

3.1. Wykres bez skali

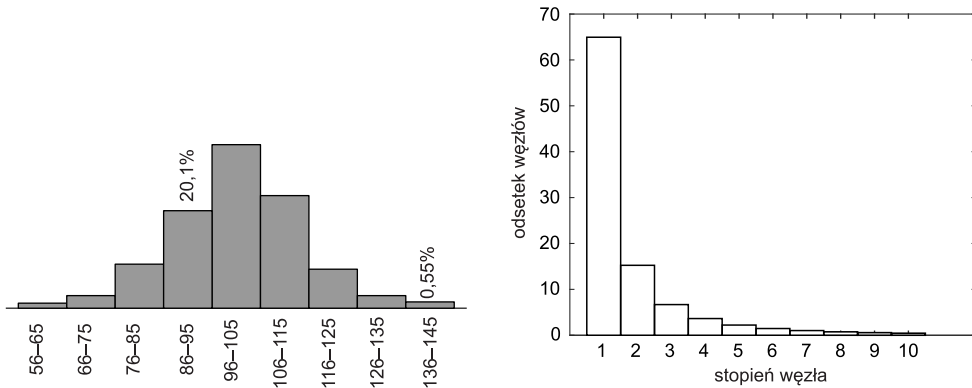
Ponieważ w sieciach złożonych powiązania nie są regularne, możemy spodziewać się, że wskaźniki opisujące poszczególne wierzchołki również będą charakteryzować się rozbieżnością. Sieć modeluje przecież pewną rzeczywistość, a w świecie rzeczywistym spodziewamy się zróżnicowania cech przedmiotów tej samej klasy. Na przykład, wzrost osób dorosłych określonej płci, temperatura ciała w czasie spoczynku czy wyniki testów na inteligencję są zróżnicowane [5, 102, 132]. Sposób, w jaki wyniki te wypadają na skali liczbowej, z dużą dokładnością odpowiada rozkładowi Gaussa: dla dużej części populacji wartości są skupione wokół wartości średniej, a szansa wystąpienia osobnika wyjątkowo odbiegającego od średniej jest niska. Taki rozkład obserwacji jest powszechny dla wielu dziedzin życia.

Pozostając wciąż w populacji ludzkiej, sprawdźmy, jak rozkładają się wartości opisujące powiązania społeczne jednostek w portalu społecznościowym YouTube, posługując się w tym celu liczbą osób zaprzyjaźnionych z konkretnym użytkownikiem usługi (tj. stopniem węzła sieci). Na rysunku 3.1 widać, że rozkład cech jest zasadniczo odmienny. Przede wszystkim trudno jest dla tego drugiego wskazać wartość typową. Owszem, najwięcej użytkowników nawiązało poprzez serwis tylko jedną znajomość², ale jest to wynik skrajny, naocznie różny od wartości średniej i dlatego bezużyteczny.

Jaka jest więc wartość średnia stopnia węzła w naszej sieci złożonej? Obliczona w zakresie danych przedstawionych na rys. 3.1 (czyli dla 97% użytkowników) wynosi 1,78. Udział węzłów o coraz wyższych stopniach w sposób ewidentny zanika do zera, więc intuicyjnie nie przywiązujemy wagi do tzw. ogonów rozkładu, czyli fragmentu peryferyjnego, odpowiadającego jednostkom wyjątkowo odbiegającym od

¹ Kariery projektantów mody, Jeanne-Marie Lanvin oraz Charlesa Federicka Wortha, są przykładami takiej właśnie ewolucji ich ról społecznych. Oboje zaczęli jako praktykanci, realizując konwencjonalne zlecenia klientów, ale dość szybko przekonali ich do własnych projektów strojów, z czasem tworząc własne marki i domy mody.

² Wartość najczęściej występującą w próbie lub rozkładzie nazywamy *dominantą*.



Rysunek 3.1. Rozkład ilorazu inteligencji (z lewej) oraz rozkład stopnia węzłów-profilu użytkowników serwisu YouTube (z prawej)

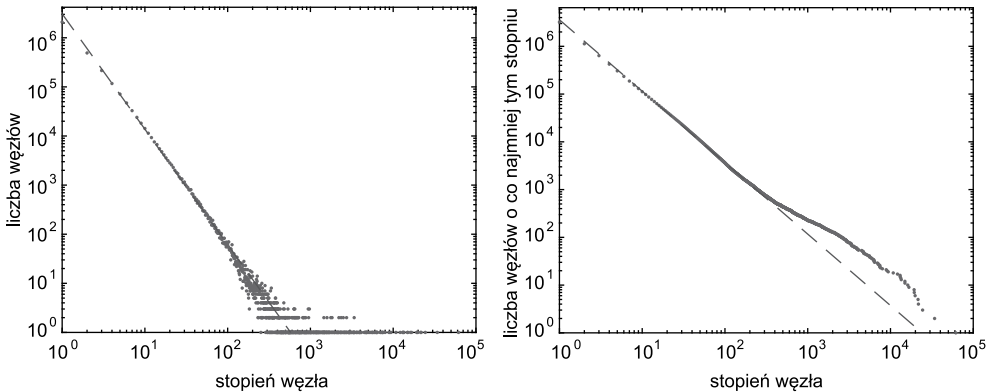
normy³. Jeśli jednak uwzględnimy w statystykach nie węzły do stopnia 10, ale 100, 1000 lub 10 000, otrzymamy średnią ze stopni węzłów równą 2,4, potem 2,62, wreszcie 2,8. Oznacza to, że owe nieuwzględnione 3% węzłów jest w stanie zwiększyć obliczoną średnią o prawie 50%. Zjawisko to wynika z powstawania w sieciach złożonych stosunkowo niewielkiej liczby węzłów o bardzo wysokim stopniu. W naszej sieci YouTube największy węzeł ma ponad 60 tysięcy powiązań z innymi; aby w sposób użyteczny przedstawiać wyniki o takiej rozpiętości, należy posługiwać się skalą logarytmiczną. Tak właśnie sporządzono wykres liczby węzłów określonego stopnia na rys. 3.2. Dla małych stopni punkty wykresu są praktycznie współliniowe, co w takim układzie osi oznacza, że stosunek liczby węzłów o określonym stopniu do liczby węzłów o stopniu np. dwukrotnie większym jest bardzo zbliżony w całym sporym zakresie⁴. Liczności węzłów określonego stopnia mogą więc być przybliżane ciągiem geometrycznym.

Zjawiska opisywane zależnością geometryczną nie ograniczają się do przestrzeni wirtualnej. Fenomen ten docenił i opisał już Galileusz; wcześniej jednak zjawiska naturalne tego typu były naśladowane w sztuce zdobniczej. Opisują one zarówno powtarzającą się proporcję pomiędzy elementami fizycznymi, jak i intensywność występowania zjawisk: susz i powodzi, trzęsień ziemi, aktywności Słońca. Rozwój wiedzy ekonomicznej przyniósł pierwsze obserwacje zjawisk tej natury w odniesieniu do podziału dóbr materialnych: Vilfredo Pareto zauważył [118], że 20% obywateli posiada 80% ziemi⁵.

³ Dla rozkładu Gaussa szansa wylosowania wartości odległej o x od wartości oczekiwanej maleje proporcjonalnie do e^{-x^2} , a więc bardzo szybko dla dużych x .

⁴ Porównując w naszym przypadku stosunek liczby węzłów o stopniu $x = 1, 2, 4, 8, 16$ do liczby węzłów o stopniu (odpowiednio) 2, 4, 8, 16 i 32, otrzymujemy wartości: 4, 26; 4, 19; 4, 88; 5, 01; 5, 10 – różnią się one zaledwie o 19%. Takiej zgodności nie otrzymamy w całym zakresie dostępnych danych z różnych przyczyn, lecz i tak regularność wykresu zrobi wrażenie na każdym, kto miał do czynienia z surowymi danymi rzeczywistymi.

⁵ Obecnie podział ten jest jeszcze mniej korzystny, co tylko potwierdza hipotezę, że w sieci złożonej powstaną dowolnie duże węzły, jeśli dać jej dość czasu na rozwój. Jedynie osobliwości (wojny, rewolucje, kryzysy, epidemie) stanowią naturalne ograniczenie wzrostu.



Rysunek 3.2. Wykres punktowy liczby węzłów określonego stopnia (z lewej) oraz liczby węzłów o określonym stopniu *lub* wyższym (z prawej). Punkty w początkowych fragmentach obu wykresów są prawie współliniowe; ich przybliżenie liniowe zaznaczono prostymi o nachyleniu odpowiednio $-2,47$ oraz $-1,49$

Później było już tylko gorzej: globalizacja oraz cyfrowe środki komunikacji sprzęgły i nadal sprzęgają elementy sieci coraz gęstsza siecią połączeń i w coraz to nowych aspektach. Nic więc dziwnego, że myślenie o świecie gaussowskim odchodzi do lamusa, a nowy porządek wymaga nowych definicji. Wszystko dlatego, że fenomen zależności geometrycznej pociąga za sobą poważne konsekwencje.

Wróćmy do rys. 3.2. Jeśli przyjmiemy, że rzeczywiście licznosc węzłów o stopniach w ciągu geometrycznym tworzy również ciąg geometryczny, wówczas prawdopodobieństwo, że węzeł w sieci osiągnie stopnień x opisuje zależność

$$P(x) = p_0 x^{-\alpha}, \quad (3.1)$$

przy ograniczeniu dziedziny z dołu, $x \geq x_{\min}$. Wzór (3.1) definiuje *rozkład potęgowy*. Współczynnik p_0 określa wartość prawdopodobieństwa dla $x = 1$. Jest to współczynnik „techniczny”; jego wartość zapewnia sumowanie się rozkładu do jedności. Natomiast α to *wykładnik charakterystyczny* rozkładu potęgowego. Jeśli zjawisko rzeczywiście da się opisać rozkładem potęgowym, znajomość tylko tego jednego parametru wystarczy, aby je odpowiednio sklasyfikować. Na rysunku 3.2 wykładnik α odpowiada nachyleniu prostej, wzdłuż której układają się punkty odpowiadające stopniom węzłów. Prosta taka została wyznaczona dla początkowego, czytelnego fragmentu wykresu i wykreślona linią przerywaną, a jej nachylenie wynosi $-2,47$. Analiza dalszej części wykresu jest utrudniona: punkty tworzą chmurę, bowiem kolejne węzły o coraz wyższych stopniach pojawiają się nieregularnie i jest ich niewiele. Problem ten omija się, analizując *wykres rankingowy*, czyli liczbę wierzchołków o stopniu równym lub wyższym niż założony. Wykres ten, z prawej strony rysunku, uwidacznia, że zjawisko potęgowej zależności występuje również dla węzłów o wyższych stopniach, ale jego nachylenie podlega większym fluktuacjom.

Nachylenie wykresu rankingowego jest o jeden mniejsze niż wykresu stopni wierzchołków⁶. Sprawdźmy: dla analogicznego fragmentu otrzymujemy wynik $-1,49$, czyli prawie idealnie zgodnie z teorią. Dlatego wykresy tego typu są powszechnie wykorzystywane w obrazowaniu zależności potęgowych.

O zjawiskach dających się opisać rozkładem potęgowym, w szczególności o sieciach złożonych, mówi się, że są *bezskałowe*. Mamy tu na myśli skalę rozpatrywanych zjawisk: na rys. 3.1 uwzględniliśmy prawie wszystkich użytkowników Youtube (97%), ale okazuje się, że to do pozostałych należy aż 41% łączy w sieci! Przyjrzyjmy się zatem tej elicie, z której znów możemy wyodrębnić 3% węzłów najsilniej usieciowionych. W tej grupie wyznacznikiem „elitarności” jest stopień węzła powyżej 112. Okazuje się, że do pozostałych 3% należy... tak, dokładnie 41% łączy w tym podzbiore. Wydzielając w sposób analogiczny kolejną elitę, tj, tych, którzy mają powiązania z ponad 2844 innymi użytkownikami, dowiadujemy się, że należy do nich 44% procent powiązań elity elit. Oznacza to, że skala zjawisk potęgowych jest nieistotna⁷. Istotne są tylko proporcje między zjawiskami rzadkimi i wielkimi a pospolitymi. Potęgowy rozkład stopni wierzchołków został potwierdzony w przypadku wielu sieci społecznych, komputerowych i lotniczych, finansowych oraz semantycznych.

Skalę tej, obserwowanej w dowolnym powiększeniu dysproporcji w liczności i wielkości zjawisk determinuje wykładnik charakterystyczny α : im jest on mniejszy, tym dysproporcje te są silniejsze. Dla $\alpha < 2$ wartość oczekiwana rozkładu (3.1) jest nieskończona. Oznacza to, że jeśli obserwujemy takie właśnie zjawisko, to w dowolnym momencie możemy spodziewać się zdarzenia, którego ogrom przyćmi i uczyni nieistotnym wszystko, co dotychczas zaobserwowaliśmy. Znamienne jest, że wśród dotychczas przeanalizowanych przykładów [113] najmniejszą wartość wykładnika, $\alpha = 1,8$, zaobserwowano dla skali wojen w latach 1816–1980 [124]. I rzeczywiście, w czasach zimnowojennego wyścigu zbrojeń o konsekwencjach ewentualnej III wojny światowej nie trzeba było nikogo przekonywać. (Kolejnym przykładem zjawiska o podobnym charakterze, $\alpha = 1,83$, jest intensywność wybuchów na Słońcu [101]).

Większość zjawisk, dla których adekwatny jest opis rozkładem potęgowym, ma $\alpha > 2$; można więc obliczyć jego wartość oczekiwaną. Problem polega jednak na tym, że wartość ta ma niewielką praktyczną użyteczność. Statystyka taka nie niesie istotnej informacji dla większości odbiorców: dla przeciętnego obywatela uwzględnienie

⁶ Wykresowi rankingowemu (sporządzanemu dla próby losowej) odpowiada pojęcie dopełnienia dystrybuanty rozkładu do jedności. Policzymy:

$$P(X > x) = \int_x^{\infty} p_0 x^{-\alpha} dx = \frac{p_0}{-\alpha + 1} x^{-\alpha+1} = \frac{p_0}{-\alpha + 1} x^{-(\alpha-1)}.$$

Dopełnienie dystrybuanty jest więc również funkcją potęgową z wykładnikiem o 1 mniejszym.

⁷ Przeskalujemy, czyli pomnóżmy argument rozkładu (3.1) przez stałą c :

$$p_0 (cx)^{-\alpha} = \frac{p_0}{c^\alpha} x^{-\alpha}.$$

Otrzymaliśmy ponownie rozkład potęgowy o takim samym wykładniku; zmieniła się jedynie wartość współczynnika.

dochodów bogaczy w informacji o średnim krajowym wynagrodzeniu prowadzi do frustracji, a przede wszystkim nie wyjaśnia niczego. Zdecydowanie bardziej użytecznym wskaźnikiem jest w tym przypadku mediana dochodu, która de facto uwzględnia wartość wykładnika (jest proporcjonalna do $2^{\frac{1}{\alpha}}$). Stosuje się również bardziej zaawansowane statystyki, np. indeksy cen towarów liczone dla zbiorów („koszyków”) dóbr o wagach odpowiadających typowej⁸ strukturze konsumpcji.

Posługiwanie się wartością oczekiwaną rozkładu potęgowego w kontekście technicznym również jest niewygodne: wyobraźmy sobie, że taką naturę ma zjawisko, na które chcemy reagować. Chcemy np. stabilizować ruch na łączu internetowym albo wycenić polisę ubezpieczeniową. W obu przypadkach [62, 129] mamy do czynienia z procesami gruboogonowymi, dla których co prawda istnieje wartość oczekiwana, ale dochodzenie do niej (albo też: wykorzystywanie zaobserwowanych wartości) wymaga o wiele dłuższych obserwacji niż dla rozkładu Gaussa [52]. Musimy bowiem doczekać się wystąpienia zdarzeń wystarczająco rzadkich i wielkich, aby uzyskać pełną informację o naturze procesu.

Mimo że większość zjawisk opisywanych rozkładem potęgowym ma skończoną wartość oczekiwaną, *wariancja* tych zjawisk jest nieskończona. Tak dzieje się dla $\alpha < 3$ i w tym właśnie zakresie lokują się wszystkie przedstawione dotychczas przykłady. Można też podać parę nowych: częstość występowania słów w tekście, majątek i wielkość miejscowości w Stanach Zjednoczonych [113], stopień węzłów w sieci stron WWW. Ponieważ wariancja jest miarą rozproszenia zjawisk wokół jakiejś wartości średniej, należy wnioskować, że większość omawianych tu zjawisk ma potencjał generowania zdarzeń dowolnie dużych i bynajmniej nie hipotetycznych. W sieciach, których rozwój odbywa się trochę na zasadzie instynktu stadnego, możemy sobie wyobrazić istnienie wierzchołków gigantycznych. W pewnym sensie społeczeństwa oswoiły się z tą nieskończonością. Nieco gorzej sprawa wygląda od strony technologicznej: twórcy algorytmów wsparcia decyzyjnego zdają sobie sprawę z nie-gaussowskiego charakteru zjawisk; wymagają jednak kategorycznie, aby rozkłady zmiennych losowych miały skończoną wartość oczekiwaną i wariancję [138].

3.2. Drogi na skróty

Kolejną ważną i powszechną cechą sieci złożonych jest ich mała średnica. Jak mała? Znany jest powszechnie *eksperyment Milgrama* [134]: na podstawie dokonanej w latach sześćdziesiątych XX w. za pomocą rozsyłania listów rekonstrukcji sieci powiązań społecznych wykazał on, że dowolną parę ludzi można połączyć łańcuchem co najwyżej

⁸ Definicja typowej struktury konsumpcji jest arbitralna, opracowana przez agendy rządowe. Brytyjski Urząd Statystyczny przyjął koszyk towarów zawierający np. zakup fabrycznie nowego samochodu, sprzętu fotograficznego i biżuterii jako osobne pozycje. Jednocześnie nie znajdziemy w nim kosztów zakupu nowego domu, jachtu albo zabiegów medycyny estetycznej (patrz www.ons.gov.uk/economy/inflationandpriceindices/articles/consumerpriceindicesabriefguide/2016).

sześciu znajdujących się wzajemnie osób. Zauważono [86], że średnia długość ścieżki w sieci złożonej rośnie proporcjonalnie do logarytmu liczby węzłów takiej sieci i zaczęto używać wobec takich sieci pojęcia *sieci małych światów*. Sieci takie, nawet bardzo rozbudowane, cechuje niezwykła łatwość propagacji informacji, towarów, zagrożeń.

Zjawisko takie można osiągnąć na dwa sposoby. Po pierwsze, zaburzenie regularnej siatki połączeń poprzez losowe połączenie odległych węzłów drastycznie skraca odległości, dzięki możliwości „teleportacji” (natychmiastowego przeniesienia) w zupełnie inne rejony struktury. W taki właśnie sposób rozprzestrzeniła się dżuma w XIV w. [117]⁹. Po drugie, hierarchiczna struktura połączeń również umożliwia sprawną komunikację – poprzez węzły centralne. W sieciach o strukturze drzewa wyważonego statystycznie aż połowa najkrótszych ścieżek prowadzi przez węzeł centralny, tzw. korzeń. Sieci bezskalowe mają podobną właściwość, węzły o dużych stopniach znakomicie ułatwiają „szybkie przesiadki” w najróżniejsze rejony struktury. Na przykład w sieci kontaktów naukowych (determinowanej przez współautorstwo artykułów) takim znanym superwęzłem jest Paul Erdős, a w sieci współwystępowania w filmach – aktor Kevin Bacon¹⁰.

Okazuje się, że istnieją sieci bezskalowe, w których średnia długość ścieżki rośnie jeszcze wolniej niż logarytmicznie. Badania wykazały [39] istnienie sieci *sieci ultra-małych światów*, z $2 < \alpha < 3$, co skutkuje zależnością średniej długości ścieżki¹¹:

$$\langle d \rangle \sim \ln \ln |V|. \quad (3.2)$$

Dla sieci, w których węzły mają tendencję do tworzenia połączeń z innymi węzłami o podobnym stopniu, średnia długość ścieżki jest jeszcze mniejsza.

Widzimy zatem, że fenomeny sieci bezskalowych i małych światów są ze sobą powiązane, lecz nie jest to związek ścisły ani kategoryczny. W tabeli 3.1 przedstawiona jest luźna klasyfikacja sieci ze względu na intensywność zjawiska małych światów oraz bezskalowości. Przejście pomiędzy poszczególnymi kategoriami sieci jest dosyć płynne, subiektywne i dostosowane do indywidualnych potrzeb. Dla statystyka istotny w sposobie prezentacji danych będzie fakt, że 99% pomiarów tworzy rozkład potęgowy, a dla fizyka lub automatyka to charakter pozostałych 1% determinuje naturę układu.

Do wykrycia bezskalowości sieci wystarczy analiza rozkładu stopni węzłów dokonana na aktualnej strukturze sieci w dowolnym momencie jej ewolucji. Inaczej jest w przypadku logarytmicznego skalowania średniej długości ścieżki wraz ze *wzrostem* liczby węzłów – wykrycie tej zależności wymaga w gruncie rzeczy zdefiniowania matematycznego modelu wzrostu sieci, prawidłowo modelującego sieć rzeczywistą. Modelami takimi zajmujemy się w podrozdz. 4.3. Można też obserwować wzrost sieci rzeczywistej, co często bywa żmudne i kosztowne (o ile w ogóle możliwe). Dlatego też

⁹ Ludzkość prowadziła wówczas osiadły tryb życia, a osób podróżujących było niewiele. Obecnie rozprzestrzenianie się epidemii w krajach rozwiniętych ma niewielki związek z bliskością geograficzną [130].

¹⁰ Odpowiednio, dla naukowca definiowany jest „wskaźnik Erdösa”, a dla aktora – „wskaźnik Bacona”, tj. odległości w odpowiednich grafach dzielące go od tych osób.

¹¹ Oznacza to, że jeśli od czasów eksperymentu Milgrama ludność świata wzrosła z 3,4 mld do 7,5 mld obecnie, to średnia długość ścieżki powinna wzrosnąć z 6 do 6,0688. A w 2040 r., kiedy wg prognoz WHO liczba ludności osiągnie 9,2 mld, średnia długość ścieżki wzrośnie do 6,0862 (o ile nie wybuchnie III wojna światowa, której ewentualne skutki już rozważaliśmy; źródło: www.worldometers.info/world-population).

Tabela 3.1. Przykłady sieci o różnym natężeniu występowania bezskalowości oraz efektu małych światów

	Sieci		
	Bezskalowe	Prawie bezskalowe ^a	Jednoskalowe ^b
Dużych światów ^c	model deterministyczny tworzenia sieci, wg [125]	?	siatka regularna
Małych światów	wszystkie klasyczne przykłady sieci złożonych [113]	nieklasyczne modele wzrostu sieci [65], wiernie opisujące sieć WWW [65] i interakcję roślin oraz zapylających je owadów [77]	siatka regularna z losowymi przełączeniami: struktura społeczna podczas epidemii dżumy [116] sieć interakcji białek [73]
Ultramałych światów	sieć metabolizmu organizmów żywych [74]	?	—

^a Z potęgowym rozkładem stopni węzłów, z wyjątkiem końca ogona (*broad-scale* [9]).

^b Z szybko chudnącem ogonem rozkładu stopni węzłów (*single-scale* [9]).

^c O średniej długości ścieżki rosnącej istotnie wraz ze wzrostem grafu, np. liniowo lub pierwiastkowo.

skonstruowano [131] alternatywne wskaźniki mało-światowego charakteru sieci, odzwierciedlające jej podobieństwo do sieci regularnej (dużych światów i gęstych powiązań między węzłami), a zarazem do sieci losowej (małych światów, ale rzadkich powiązań między węzłami). Klasyfikacja przedstawiona w tabeli 3.1 jest oparta na obu podejściach i dlatego znajdziemy tu zarówno modele teoretyczne, modele teoretyczne dopasowane do sieci rzeczywistych, jak i same sieci rzeczywiste uchwycone i sklasyfikowane w pojedynczym momencie ich ewolucji.

Zauważmy przede wszystkim, że tabela 3.1 jest w dużej części zapełniona. Oznacza to, że można wskazać przykłady zjawisk lub modeli matematycznych o prawie dowolnej kombinacji stopnia bezskalowości oraz efektu małych światów. Wyjątek stanowi zjawisko ultramałych światów, które zawdzięczamy prawdopodobnie występowaniu węzłów o wysokim stopniu – dlatego wykluczaliśmy możliwość połączenia tej cechy z jednoskalowością, wpisując „—”. Natomiast istnienie sieci prawie bezskalowych i jednocześnie małych światów nie znajduje potwierdzenia w literaturze, ale nie jest wykluczone (stąd oznaczenie „?”). Zauważmy ponadto, że efekt małych światów nie implikuje określonego natężenia bezskalowości sieci, gdyż może być uzyskany również w sieciach prawie bezskalowych i jednoskalowych. Wreszcie, pełna bezskalowość sieci również nie determinuje wystąpienia efektu małych światów (choć zazwyczaj tak właśnie jest): można opracować model wzrostu sieci bezskalowej i jednocześnie dużych światów.

3.3. Warsztat analityka

W czasach Eulera do analizy grafów musiał wystarczyć papier i ołówek, siłą rzeczy nie można było więc badać sieci dużych ani odkryć ich złożoności. Można zaryzykować twierdzenie, że to rozwój technik obliczeniowych umożliwił dostrzeżenie istnienia